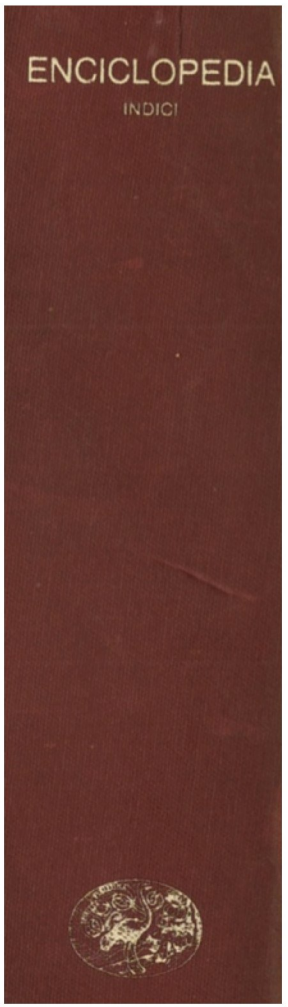


ENCICLOPEDIA EINAUDI [1982]

LOCALE/GLOBALE

Jean Petitot - **LOCALE/GLOBALE** pag.4

Massimo Galuzzi - **DIFFERENZIALE** pag.11
Pierre Delattre - **FUNZIONE** pag.53
Jean Petitot - **INFINETESIMALE** pag.62
LOCALE/GLOBALE pag.102
SISTEMI DI RIFERIMENTO pag.134
Andrea Milani - **STABILITÁ/INSTABILITÁ** pag.144
Guido Stampacchia - **VARIAZIONE** pag.162

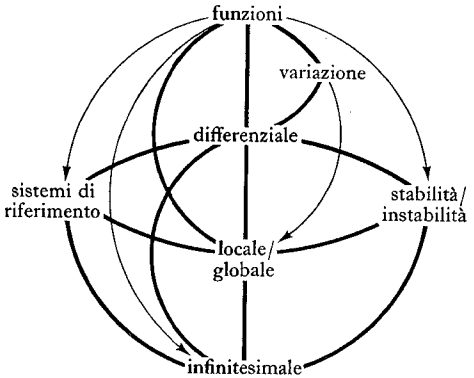
	anthropos	argomentazione	arti	calcolo	capitale	cervello	civiltà	classi	cognizione	combinatoria	comunicazione	concetto	conoscenza	corpo	creatività	cultura mat.
differenziale	·	·	·	5	3	·	·	·	·	·	4	2	3	·	·	·
funzioni	3	·	3	7	6	3	·	4	2	2	2	4	4	3	3	2
infinitesimale	·	·	·	4	·	·	·	·	·	3	·	·	4	·	·	·
locale/globale	·	·	·	5	4	5	4	5	4	7	6	6	5	·	3	5
sistemi di riferimento	·	·	·	2	·	3	2	5	·	·	4	4	3	3	2	·
stabilità/instabilità	·	·	·	5	6	6	·	3	·	4	5	4	5	·	3	4
variazione	1	·	3	·	5	4	2	2	5	1	4	4	4	·	2	·

	memoria	metodo	modo di produz.	mythos/logos	natura	normale/anormale	orale/scritto	organico/inorgan.	organismo	parentela	politica	probabilità	produzione/distrib.	regione	religione	rito
differenziale	·	4	·	·	3	3	·	4	4	·	·	·	·	3	·	·
funzioni	2	5	·	·	·	·	4	3	5	4	·	8	2	5	5	·
infinitesimale	·	6	·	·	4	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
locale/globale	2	4	4	3	6	2	4	6	5	2	·	3	4	6	·	4
sistemi di riferimento	·	6	·	·	5	3	3	2	·	3	4	1	·	2	3	2
stabilità/instabilità	2	3	2	2	4	·	2	7	7	2	2	3	5	5	3	2
variazione	·	·	·	2	2	2	3	6	5	·	·	4	·	4	2	2

	dialettica	domesticam.	eccedente	enunciazione	eredità	esoterico/essoter.	evoluzione	filosofia/filosofie	fisica	generazioni	geometria e topol.	giustizia	guerra	homo	inconscio	letteratura	linguaggio	locale/globale	logica	macchina	materia
differenziale	6	·	2	·	·	·	·	2	7	·	8	·	·	·	·	·	·	8	3	2	4
funzioni	6	·	·	2	4	·	·	·	9	·	8	·	2	·	·	2	4	10	7	7	4
infinitesimale	5	·	·	·	·	·	·	3	4	·	5	·	·	·	·	·	·	5	5	·	·
locale/globale	6	·	·	3	1	3	2	3	7	·	6	5	5	1	4	·	3	7	·	5	5
sistemi di riferimento	6	·	·	·	·	·	2	5	8	·	6	·	·	·	·	·	6	6	5	2	7
stabilità/instabilità	6	2	4	2	2	·	5	3	6	2	5	3	3	3	1	1	2	6	·	3	5
variazione	4	·	·	·	7	·	8	4	7	·	4	·	·	3	·	·	5	6	2	3	5

	sacro profano	segno	sistema	società	soma/psiche	spiegazione	stato	storia	strutture matem.	sviluppo/sottosvil.	tempo/temporalità	teoria/modello	testo	tolleranza/intoll.	tonale/atonale	tradizioni	universo	uomo	visione	vita/morte
differenziale	·	·	6	·	·	3	·	3	7	·	4	·	·	·	·	·	·	·	·	3
funzioni	3	2	7	5	2	4	2	·	9	·	4	2	·	·	·	3	3	2	·	·
infinitesimale	·	·	4	·	·	3	·	·	3	·	·	2	·	·	·	·	·	·	·	·
locale/globale	4	5	7	4	·	6	2	4	6	3	6	6	·	·	·	·	2	6	·	4
sistemi di riferimento	3	3	3	4	3	7	2	1	4	·	5	4	·	·	5	2	4	2	·	3
stabilità/instabilità	·	3	8	4	3	6	5	4	5	·	2	4	·	2	4	2	5	5	·	·
variazione	·	3	6	4	·	4	·	4	4	·	6	4	·	2	2	·	7	·	·	·

	sistemi di riferimento	locale/globale	differenziale	infinitesimale	funzioni	stabilità/instabilità	variazione
sistemi di riferimento	·	4	4	2	·	·	·
locale/globale	6	·	4	4	3	3	·
differenziale	5	5	·	6	6	6	6
infinitesimale	3	2	4	·	·	3	2
funzioni	5	7	7	7	·	6	6
stabilità/instabilità	·	5	3	2	·	·	·
variazione	·	3	5	·	2	·	·



ambiguità
competenza/esecuzione
fonetica
grammatica
lessico
lingua
lingua/parola
linguaggio
metrica
semantica
senso/significato
traduzione
universali/particolari

concetto
esistenza
essere
fenomeno
forma
idea
proposizione e giudizio

analogia e metafora
argomentazione
interpretazione

astratto/concreto
dialettica
identità/differenza
mediazione
opposizione/contraddizione
qualità/quantità
totalità
uno/molti

atti linguistici
dicibile/indicibile
enunciazione
presupposizione e allusione
referente

comunicazione
errore
informazione

decisione
distribuzione statistica
giochi
induzione statistica
probabilità
rappresentazione statistica
teoria/pratica

dato
etica
filosofia/filosofie
ragione
razionale/irrazionale
soggetto/oggetto
uguaglianza
valori
vero/falso
volontà

catastrofi
ciclo
evento
periodizzazione
tempo/temporalità

antico/moderno
calendario
decadenza
escatologia
età mitiche
genesi
passato/presente
progresso/reazione
storia

caos/cosmo
infinito
macrocosmo/microcosmo
mondo
natura
osservazione
reale
unità

alchimia
astrologia
cabala
elementi
esoterico/essoterico

atlante
collezione
documento/monumento
fossile
memoria
rovina/restauro

armi
frontiera
guerra
imperi
nazione
tattica/strategia

curve e superfici
geometria e topologia
invariante

deduzione/prova
equivalenza
formalizzazione
logica
possibilità/necessità
referenza/verità
ricorsività

differenziale
funzioni
infinitesimale
locale/globale
sistemi di riferimento
stabilità/instabilità
variazione

analisi/sintesi
anticipazione
ipotesi
matematiche
metodo

funzione
misura
modello
struttura
teoria/modello

alienazione
coscienza/autocoscienza
immaginazione sociale
pace
servo/signore
uomo
utopia

demagogia
discriminazione
repressione
terrore
tolleranza/intolleranza
tortura
violenza

centrato/acentrato
combinatoria
grafo
labirinto
rete

applicazioni
assioma/postulato
continuo/discreto
dipendenza/indipendenza
divisibilità
dualità
insieme
razionale/algebrico/trascendente
simmetria
strutture matematiche
trasformazioni naturali / categorie

abaco
algoritmo
approssimazione
calcolo
numero
zero

caso/probabilità
causa/effetto
certezza/dubbio
coerenza
convenzione
determinato/indeterminato
empiria/esperienza
esperimento
legge
libertà/necessità
metafisica
naturale/artificiale
operatività
paradigma
previsione e possibilità
riduzione
ripetizione
scienza
spiegazione
verificabilità/falsificabilità

categorie/categorizzazione
conoscenza
coppie filosofiche
disciplina/discipline
enciclopedia
innovazione/scoperta
insegnamento
invenzione
rappresentazione
ricerca
sistematica e classificazione

controllo/retroazione
energia
equilibrio/squilibrio
interazione
ordine/disordine
organizzazione
semplice/complesso
sistema
soglia
vincolo

analogico/digitale
automa
intelligenza artificiale
macchina
programma
simulazione
strumento

cervello
comportamento
e condizionamento
controllo sociale
emozione/motivazione
mente

apprendimento
autoregolazione/equilibrazione
cognizione
induzione/deduzione
innato/acquisito
istinto
operazioni
percezione
quoziente intellettuale

astronomia
cosmologie
gravitazione
luce
materia
spazio-tempo

atomo e molecola
conservazione/invarianza
entropia
fisica
forza/campo
moto
particella
plasma
propagazione
quanti
relatività

atmosfera
litosfera
oceani
pianeti
sole
universo

reversibilità/irreversibilità
stato fisico

adattamento
evoluzione
mutazione/selezione
polimorfismo
specie

cellula
differenziamento
immunità
individualità biologica
integrazione
invecchiamento
organismo
regolazione
sviluppo e morfogenesi

catalisi
macromolecole
metabolismo
omeostasi
organico/inorganico
osmosi
vita

eredità
gene
genotipo/fenotipo
razza
sangue

Locale/globale

allegoria
codice
immagine
metafora
segno
significato
simbolo

avanguardia
classico
critica
filologia
letteratura
maniera
poetica
retorica

bello/brutto
creatività
espressione
fantastico
gusto
imitazione
immaginazione
progetto
riproduzione/riproducibilità
sensibilità
spazialità

anthropos
cultura/culture
etnocentrismi
natura/cultura

alfabeto
ascolto
gesto
lettura
luogo comune
orale/scritto
parola
ritmo
scrittura
voce

discorso
finzione
generi
narrazione/narratività
stile
tema/motivo
testo

arti
artigianato
artista
attribuzione
oggetto
produzione artistica

acculturazione
civiltà
futuro
selvaggio/barbaro/civilizzato

armonia
melodia
ritmica/metrica
scala
suono/rumore
tonale/atonale

colore
disegno/progetto
visione

escrementi
fertilità
nascita
sensi
sessualità
vecchiaia
vita/morte

educazione
generazioni
infanzia
morte

coltivazione
cultura materiale
industria rurale
materiali
prodotti

abbigliamento
canto
corpo
danza
maschera
moda
ornamento
scena

amore
desiderio
eros
isteria
pulsione
soma/psiche
sonno/sogno

credenze
dialetto
enigma
fiaba
mostro
popolare
proverbi
tradizioni

cannibalismo

dèi
divino
eroi
iniziazione
magia
messia
millennio
persona
puro/impuro
religione
sogno/visione
stregoneria

angoscia/colpa
castrazione e complesso
censura
identificazione e transfert
inconscio
nevrosi/psicosi
piacere

clinica
cura/normalizzazione
esclusione/integrazione
farmaco/droga
follia/delirio
medicina/medicalizzazione
normale/anormale
salute/malattia
sintomo/diagnosi

fuoco
homo
mano/manufatto
tecnica
utensile

ateo
chierico/laico
chiesa
diavolo
eresia
libertino
libro
peccato
sacro/profano
santità

demoni
divinazione
mito/rito
mythos/logos
origini

agonismo
cerimoniale
festa
feticcio
gioco
lutto
regalità
rito

casta
donna
endogamia/esogamia
famiglia
incesto
maschile/femminile
matrimonio
parentela
totem
uomo/donna

alimentazione
animale
cucina
domesticamento
fame
vegetale

caccia/raccolta
dono
eccedente
pastorizia
primitivo
reciprocità/ridistribuzione

consenso/dissenso
egemonia/dittatura
intellettuali
libertà
maggioranza/minoranza
partiti
politica

borghesi/borghesia
burocrazia
classi
contadini
ideologia
masse
proletariato
rivoluzione

economia
formazione economico-sociale
lavoro
modo di produzione
proprietà
riproduzione
transizione

abbondanza/scarsità
bisogno
consumo
imposta
lusso
oro e argento
pesi e misure
produzione/distribuzione
ricchezza
scambio
spreco

amministrazione
comunità
conflitto
élite
gergo
gruppo
marginalità
opinione
povertà
propaganda
ruolo/status
socializzazione
società
spazio sociale

accumulazione
capitale
crisi
distribuzione
fabbrica
gestione
imperialismo
impresa
mercato
merce
moneta
pianificazione
profitto
rendita
salario
utilità
valore/plusvalore

consuetudine
diritto
giustizia
istituzioni
responsabilità

costituzione
democrazia/dittatura
norma
patto
potere
potere/autorità
pubblico/privato
società civile
stato

abitazione
acqua
ambiente
città
clima
ecumene
insediamento
migrazione
paesaggio
popolazione
regione
risorse
suolo
terra
territorio
villaggio

agricoltura
città/campagna
colonie
commercio
industria
spazio economico
sviluppo/sottosviluppo

ndon (trad.

it. Ei-

Locale/globale

Differenziale, Funzioni, Infinitesimale, Locale/globale, Sistemi di riferimento, Stabilità/instabilità, Variazione

L'opposizione ♦locale/globale♦ è una di quelle opposizioni fondamentali che, come quelle tra il discreto e il continuo o tra il finito e l'infinito, sono proteiformi e intervengono a tutti i livelli della riflessione e della pratica matematica. È una opposizione portante, organizzatrice e distributrice il cui contenuto è sia concettuale sia tecnico. Si può dire che è un'opposizione dotata di un eminente *valore categoriale*.

Questa opposizione fa parte della lingua naturale ed è spontaneamente utilizzata per indicare situazioni certamente diverse ma la cui intuizione è relativamente unitaria. Se ne darà qualche esempio scelto a caso fra i molti.

Si è iniziato l'articolo «Locale/globale» di questa *Enciclopedia* con alcune riflessioni informali sulla struttura semantica di un lessico. Si tratta di un esempio tipico. In questo caso si utilizza il termine 'locale' per parlare di campi semantici ristretti e ben articolati come il campo semantico dei colori, o degli utensili di cucina, o di sottodiscipline di una certa scienza, ecc. In particolare, gli articoli di questa *Enciclopedia* sono, relativamente al tutto che essa costituisce, delle organizzazioni locali. Si vede che l'accezione del termine 'locale' ricopre qui due problemi. In primo luogo quello delle *classificazioni*, dato che ogni campo semantico consiste nella classificazione secondo una regola di una certa varietà. E inoltre quello del *livello di osservazione* scelto per operare la classificazione. Per precisare un poco questa accezione tassonomica, si consideri l'esempio del sistema fonologico di una lingua. Questo sistema può essere considerato in un primo momento come l'*insieme* degli «atomi» fonetici. Questo insieme, che si suppone ben definito su basi fisico-audioacustiche, svolge il ruolo di una totalità di elementi considerati analoghi, omogenei rispetto alla loro natura, anche se non equivalenti l'uno all'altro. Si tratta in qualche modo di un *quadro globale di riferimento*. Si potrebbe allora credere che, detto $\mathcal{P}$ questo insieme, se p è un «atomo» fonetico, vale a dire un suono fonetico elementare come una consonante o una vocale, l'approccio formale della tassonomia associata a $\mathcal{P}$ si riduca allo studio della relazione di appartenenza insiemistica $p \in \mathcal{P}$. Ma non è affatto vero. Un tale approccio sarebbe di una povertà estrema. Infatti i suoni fonetici elementari sono *forme* audioacustiche che possono variare in modo *continuo* e che sono dunque deformabili. Ciò significa che lo spazio $\mathcal{P}$ è naturalmente munito di una *topologia* (cfr. l'articolo «Geometria e topologia») che definisce una relazione di vicinanza tra i suoni fonetici elementari. E per di piú la percezione non è sensibile a tutte le proprietà di questi suoni fonetici elementari. Come hanno mostrato numerose esperienze effettuate in questi ultimi quindici anni, la percezione fonetica è *categoriale*. Ciò significa quanto segue. Si consideri una sequenza di N stimoli (una dozzina) $(s_1, \ldots, s_N)$ che conduca in modo progressivo per esempio dalla sil-

laba [*pa*] alla sillaba [*ba*] in una lingua in cui la differenza sordo/sonoro [*p*]/[*b*] sia pertinente. Si sottopongano allora dei soggetti a test di identificazione e di discriminazione. I primi test consistono nel domandare ai soggetti, ai quali si presenta una serie aleatoria di occorrenze degli s_i, di riconoscere ogni occorrenza come [*pa*] o [*ba*]. I secondi test consistono nel domandare ai soggetti, ai quali si presenta una serie aleatoria di coppie (s_i, s_{i+1}) di stimoli successivi, se distinguono i due stimoli proposti. Mediante una statistica delle risposte, i test di identificazione conducono a risultati scontati a priori. Si ottiene una risposta di 100 per cento di [*pa*] e di 0 per cento di [*ba*] per i primi stimoli $s_1 \ldots s_k$, una risposta di 100 per cento di [*ba*] e di 0 per cento di [*pa*] per gli ultimi stimoli $s_l \ldots s_N$, e la percentuale delle risposte [*pa*] crolla catastroficamente per essere rimpiazzata dalla risposta [*ba*] nella zona intermedia. Si ottiene cosí un'*interfaccia* (una frontiera) K che separa la categoria [*pa*] dalla categoria [*ba*]. In compenso i risultati dei test di discriminazione conducono a risultati che hanno molto sorpreso i fonetisti. Se si considera una percezione continua (non categoriale) come quella dei colori, è un fatto chiaro e appartenente all'esperienza usuale come si possano altrettanto bene distinguere due sfumature di rosso o di arancione vicine quanto una tinta rosso-arancione da una tinta arancione-rosso. La scomposizione del campo dei colori in categorie etichettate da nomi è di natura *linguistica* e praticamente non influisce affatto sulle capacità percettive di discriminazione. Ma non succede la stessa cosa nel caso della percezione fonetica. I test di discriminazione mostrano che *non esiste discriminazione intracategoriale*. Si possono discriminare soltanto stimoli vicini separati da K, vale a dire riconosciuti come differenti. È in questo senso che la percezione è categoriale. Essa è subordinata all'identificazione. Come dicono i fonetisti, si effettua su basi *assolute*. La percezione categoriale è un fenomeno percettivo di primaria importanza. Essa spiega come un flusso acustico *continuo* può essere percettivamente *discretizzato* e diventare per ciò stesso il supporto di un *codice*. Si vede che la percezione fonetica manifesta essenzialmente la *categorizzazione* dello spazio topologico $\mathcal{P}$ dei suoni fonetici elementari con un sistema K di *discontinuità* (cfr. l'articolo «Continuo/discreto») che vi definiscono una sorta di «geografia» (domini separati da frontiere). I domini di $\mathcal{P}$ delimitati da K sono i fonemi del sistema. Questi fonemi sono classi di equivalenza di suoni fonetici elementari chiamati anche allofoni.

Si capisce molto bene con questo esempio l'importanza dei concetti *strutturalisti* introdotti da Saussure e sviluppati da Jakobson e Hjelmslev (cfr. l'articolo «Struttura»). Come classe di equivalenza di allofoni, un fonema non può avere una definizione puramente audioacustica. Esso è definito dal suo *valore*, vale a dire dall'estensione del suo dominio in $\mathcal{P}$. Ora, dato che questa estensione è determinata dal sistema globale di interfaccia K, un fonema non ha un'esistenza isolata. Esso non esiste se non in modo relazionale per mezzo delle sue relazioni con gli altri elementi del sistema. Se si associa ad ogni dominio una «capitale», cioè un allofono *prototipico* che occupa approssimativamente il baricentro del dominio stesso, si può dire che i prototipi costituiscono gli *elementi* del sistema, cioè il suo aspetto locale, ma che, quanto al valore, il sistema globale è implicitamente presente in ciascuno degli elementi.

Ci si tròva in questo caso in presenza di una esemplificazione del paradigma strutturalista. L'approccio strutturalista consiste essenzialmente nell'interpretare le tassonomie in termini di categorizzazione come sistemi di rapporto, vale a dire in termini di sistemi di discontinuità che scompongono in domini (in classi di equivalenza) un certo spazio topologico. Ciò è valido in particolare per i campi semantici. In quest'ottica il locale si riferisce agli elementi del sistema e il globale al sistema stesso. E il postulato strutturalista del primato del criterio relazionale dell'identità sul criterio sostanziale (del primato della differenza sull'identità, cfr. l'articolo «Identità/differenza») ribadisce che, quanto al valore, è il globale che *determina* il locale. Questo punto di vista si oppone risolutamente al punto di vista riduzionista e «atomista» secondo cui gli elementi del sistema hanno un'esistenza autonoma e si aggregano per interazione in un sistema globale a partire dalle loro proprietà intrinseche.

Per ritornare alla struttura dei lessici e delle enciclopedie, si vede che il problema è quello dell'estensione, del prolungamento, dei campi semantici e quello dei loro incollamenti. Il campo semantico che, in ciò che precede, funzionava come un quadro di riferimento globale inducente una categorizzazione, funziona ora come un campo locale suscettibile di estendersi e di intersecarsi con altri campi locali. Si entra in questo caso in una problematica completamente diversa in cui si tratta di aggregare dei domini locali. Ognuno di noi ha sperimentato come le carte geografiche possono essere incollate in modo da formare una carta globale. Questa esperienza elementare rende manifesta l'eminente *relatività* della dialettica del locale e del globale. Essa rende anche manifesta l'importanza del *livello di osservazione* scelto. Semplificando i dati, per esempio usando l'*astrazione* nel caso semantico, è possibile ridurre un sistema globale a una situazione locale.

Nel suo sviluppo, la matematica ha incontrato problemi analoghi, ma dato che gli oggetti matematici sono oggetti costruiti, ha potuto dare un contenuto *tecnico e operatoriale* ai diversi aspetti della dialettica del locale e del globale. Essa ha potuto, in numerosi casi, rispondere in modo specifico, esplicito e profondo a problemi come i seguenti: in quale misura delle condizioni locali impongono proprietà o comportamenti globali? In quale misura la struttura globale impone reciprocamente delle condizioni locali? In quale misura c'è equivalenza tra determinazione locale e determinazione globale? Quali sono i metodi di passaggio dal locale al globale? Come si può localizzare una situazione? ecc.

Questi diversi problemi sono di una complessità cosí proliferante che non è possibile, in un articolo di sintesi come questo, neppure enumerarne semplicemente i diversi aspetti. Ci si limiterà dunque, in modo estremamente rudimentale e, purtroppo, tecnicamente molto vago, a ripercorrere alcuni problemi sviluppati in modo piú preciso negli articoli ◆Differenziale◆, ◆Funzioni◆, ◆Infinitesimale◆, ◆Locale/globale◆, ◆Sistemi di riferimento◆, ◆Stabilità/instabilità◆ e ◆Variazione◆.

1. *La geometria dello spazio fisico.*

Ogni nostra esperienza pratica conferma che lo spazio fisico è localmente euclideo. Il primo esempio storico di passaggio dal locale al globale è fornito dall'estrapolazione di Euclide che postula che, globalmente, lo spazio è ancora euclideo. Questa estrapolazione si esprime assiomaticamente con il famoso assioma delle parallele che è un giudizio sintetico a priori caratteristico della geometria e che la rende irriducibile alla logica. Con la comparsa delle geometrie non euclidee (iperboliche ed ellittiche), si è preso coscienza del fatto che esistono molti spazi globali che 1) sono omogenei, cioè possiedono ovunque la stessa struttura, e 2) sono localmente euclidei. Questi spazi omogenei sono caratterizzati dalla loro curvatura (positiva per gli spazi ellittici e negativa per gli spazi iperbolici) e la loro omogeneità è descritta con il gruppo di invarianza. Di qui l'idea fondamentale, dovuta a Felix Klein, di caratterizzare una geometria con il suo gruppo di invarianza e con le proprietà invarianti sotto l'azione di questo gruppo (cfr. gli articoli «Geometria e topologia», «Invariante»).

Se si abbandona la condizione di omogeneità, si arriva a una situazione piú generale che Riemann è stato il primo a immaginare chiaramente. Si tratta di spazi la cui metrica varia, vale a dire la cui struttura euclidea tangente *cambia* con il punto considerato. Ciò implica che non c'è piú gruppo di invarianza nel senso precedente, in altre parole che gli «osservatori» locali non possono piú «comunicare». Per ristabilire la «comunicazione», occorre fare la sintesi del punto di vista di Klein e del punto di vista di Riemann. Questa sintesi è essenzialmente dovuta a Cartan. Essa è fondamentale per la relatività generale.

2. *I livelli di struttura e la dialettica locale/globale.*

Ciò che caratterizza la geometria moderna è l'estrema estensione del concetto di spazio e la ricchezza delle procedure di costruzione di spazi. Questa diversificazione proliferante del «genere» spazio in «spazi» pone dei problemi di *classificazione* che sono stati e sono tuttora uno dei fattori determinanti del progresso concettuale della geometria.

Si citerà ora una procedura di costruzione che è fondamentale pur essendo elementare. Essa consiste nel partire da pezzi di spazi standard (in generale gli spazi $\mathbf{R}^n$) e nell'incollarli. Se U e V sono due pezzi, l'incollamento consisterà nell'identificare un sottopezzo U' di U con un sottopezzo V' di V. Questa identificazione significa che si considera un isomorfismo tra U' e V'. Ma la nozione di isomorfismo è una nozione fondamentalmente *relativa*. Essa dipende dal *livello di struttura* considerato. Ora gli spazi standard $\mathbf{R}^n$ sono naturalmente muniti di strutture sempre piú «rigide», sempre piú vincolanti, che costituiscono una *gerarchia* di livelli, ciascun livello essendo associato a (e anche caratterizzato da) un tipo di applicazione, di morfismo, tra spazi. Il livello di base è il livello insiemistico che è il meno vincolante. I morfismi associati sono le applicazioni e gli isomorfismi, le applicazioni biiettive (cfr. gli articoli «Insieme» e «Applicazioni»). Il primo livello che manifesta una certa coesione è il livello topologico. I morfismi associati sono le applicazioni continue e gli isomorfismi, detti anche omeomorfismi, le applicazioni biiettive bicontinue (cfr. l'articolo «Geometria e topologia»). Se si incollano pezzi di $\mathbf{R}^n$ mediante gli omeomorfismi si ottengono spazi detti «varietà topologiche». Un livello piú vincolante di quello topologico è il livello differenziabile. Dato che $\mathbf{R}^n$ è uno spazio vettoriale normato, se $f: U \to V$ è un'applicazione continua tra due aperti di $\mathbf{R}^n$, si può dire quando è differenziabile (cfr. l'articolo «Differenziale»). I morfismi associati a questo livello di struttura sono dunque le applicazioni differenziabili e gli isomorfismi, detti anche diffeomorfismi, sono le biiezioni bicontinue differenziabili insieme alle loro inverse. Se si incollano pezzi di $\mathbf{R}^n$ con diffeomorfismi si ottengono spazi detti «varietà differenziabili», i quali costituiscono il principale esempio di spazi ottenuti con un processo di incollamento.

Per costruzione, le varietà differenziabili sono *localmente triviali* (cfr. l'articolo ◆Locale/globale◆) poiché sono localmente diffeomorfe a spazi standard $\mathbf{R}^n$. Esse si distinguono dunque soltanto globalmente. Se si vuol tentare di classificarle a meno di diffeomorfismi, occorre di conseguenza costruire degli invarianti differenziabili (cioè invarianti per diffeomorfismo) e cercare di trovare una lista abbastanza ricca di invarianti affinché i loro valori, data una varietà M, siano sufficienti a caratterizzare M. Un tale programma si scontra con terribili difficoltà che sono ancora lungi dall'essere risolte. Ma alcune idee si impongono in modo naturale. La prima idea è quella di determinare quali vincoli impone un livello di struttura inferiore a un livello di struttura superiore. Il livello insiemistico non impone quasi nessun vincolo. Infatti l'unico invariante insiemistico rispetto alle biiezioni è il numero cardinale, e tutte le varietà «normali» hanno la potenza del continuo. In compenso il livello topologico è di grande importanza. Se M e N sono due varietà differenziabili diffeomorfe, sono a fortiori omeomorfe in quanto varietà topologiche. Si può dunque cominciare tentando di classificare le varietà topologiche per poi classificare, essendo dato un tipo topologico, le strutture differenziabili che sono compatibili con esso (supponendo che ne esistano, il che esige che il tipo topologico considerato non sia troppo «patologico»).

Lo strumento principale per classificare le varietà topologiche è la topologia algebrica (detta inizialmente topologia combinatoria) inventata da Poincaré. Essa comprende due rami principali, la teoria dell'*omotopia* e la teoria dell'*omologia-coomologia*. La teoria dell'omotopia parte da una semplice osservazione. Ciò che distingue tra loro le forme globali delle varietà è in particolare il modo in cui sono «bucate» o comprendono dei «vuoti». Il miglior modo per misurare queste caratteristiche topologiche globali di una varietà topologica M (e piú in generale di uno spazio topologico) è quello di «immergere» mediante applicazioni continue $f: S^n \to M$ delle sfere di dimensione n in M e di cercare di contrarle in un punto. Se la «sfera» $f(S^n)$ comprende un «buco», allora questo buco farà *ostruzione* alla contrazione. Se per esempio, partendo da un punto base x_0 di una sfera S^2, un «osservatore» dipanando un filo descrive un cammino qualunque che ritorna in x_0 (un tale cammino chiuso si chiama laccio ed è un'applicazione continua

$f: S^1 \to S^2$) egli potrà riportare tutto il filo in x_0 facendolo scivolare sulla superficie di S^2. Una tale deformazione di un laccio si chiama «omotopia». Se in compenso, camminando su un toro, l'osservatore descrive un laccio facendo il giro di un meridiano o di un parallelo, non potrà piú contrarre il laccio corrispondente in un punto. La sfera è uno spazio senza omotopia in dimensione 1 mentre il toro è uno spazio che possiede omotopia in dimensione 1 e ciò per ragioni globali. Similmente, se l'osservatore camminando su un piano al quale è stato tolto un punto a descrive un laccio che circonda questo punto, non potrà contrarlo, poiché l'assenza del punto a fa ostruzione. Anche un piano senza un punto è dunque uno spazio che possiede omotopia in dimensione 1 ma questa volta per ragioni locali. D'altra parte se l'osservatore descrive un laccio nello spazio a tre dimensioni $\mathbf{R}^3$ senza il punto a, potrà sempre contrarlo perché dispone di una dimensione supplementare che gli permette di scansare a. $\mathbf{R}^3-(a)$ è dunque uno spazio senza omotopia in dimensione 1. Ma è intuitivo che una sfera S^2 che comprende a in $\mathbf{R}^3$ non potrà essere contratta in un punto, poiché l'assenza di a le fa ostruzione. $\mathbf{R}^3-(a)$ è dunque uno spazio che possiede omotopia in dimensione 2. La scoperta principale di Poincaré è che, dato uno spazio M, se si considerano i lacci a meno di omotopia (cioè se si considerano come equivalenti due lacci deformabili con continuità l'uno nell'altro) e se si compongono due lacci concatenandoli (percorrendoli uno di seguito all'altro), si ottiene sull'insieme delle classi di omotopia dei lacci una struttura algebrica di *gruppo*. Questo gruppo, detto gruppo fondamentale o gruppo di Poincaré di M e indicato con $\pi_1(M)$, è il primo esempio di invariante algebrico utile alla classificazione delle varietà. Di fatto il gruppo fondamentale di uno spazio topologico M non è soltanto un invariante topologico, ma un invariante del tipo di omotopia. Esso varia *funtorialmente* con M (si veda l'articolo «Trasformazioni naturali / categorie»). Si definiscono nello stesso modo i gruppi di omotopia $\pi_k(M)$ in dimensione superiore.

Si vede come un invariante algebrico come il gruppo fondamentale interviene nel problema della classificazione. Dato che π_1 è un funtore della categoria degli spazi topologici puntati nella categoria dei gruppi, ogni omoemorfismo $h: M \to N$ tra due spazi topologici induce un *isomorfismo* $h^*: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ tra i loro gruppi fondamentali. Se dunque $\pi_1(M)$ e $\pi_1(N)$ non sono isomorfi, M e N non possono essere omeomorfi. Per esempio, dato che la sfera S^2 non possiede omotopia in dimensione 1 mentre il toro T la possiede, S^2 e T non possono essere omeomorfi. Reciprocamente si cercherà di classificare gli spazi topologici che hanno gli stessi gruppi di omotopia.

Quanto all'omologia, è inizialmente una tecnica combinatoria adattata agli spazi muniti di una *triangolazione* (cfr. l'articolo «Geometria e topologia»). Essa consiste nello studiare i cicli di uno spazio (cioè le catene di bordo nullo) modulo i bordi (cioè i cicli che sono bordi di catene). L'omologia è strettamente legata all'omotopia. Considerando le forme lineari sulle catene, si definiscono dualmente i gruppi di coomologia.

L'interesse principale dei gruppi di omotopia, di omologia e di coomologia è di essere oggetti *algebrici* che misurano la struttura globale degli spazi e che variano funtorialmente. Si può svilupparne un *calcolo* (che costituisce l'oggetto della topologia algebrica) studiando il loro comportamento in rapporto alle procedure standard di costruzione e di decomposizione degli spazi (sottospazi, spazi quoziente, spazi prodotto, fibrazioni, ecc.). A partire dal momento in cui si dispone di tali strumenti per trattare il livello topologico si cercherà di sapere in quale misura questo livello vincola i livelli gerarchicamente superiori e in particolare il livello differenziabile. Data una varietà topologica M, si cercherà di classificare le strutture differenziabili su M che inducono la sua struttura topologica. L'idea principale è quella di tradurre queste strutture con classi di omotopia di applicazioni tra spazi associati a M e di applicare i metodi della topologia algebrica.

Oltre questi metodi di topologia algebrica si è stati condotti ad inventare metodi corrispondenti direttamente al livello differenziabile e che sono l'oggetto della topologia differenziale. Tra questi occorre citare prima di tutto la teoria di Morse e il cobordismo. Poiché la classificazione delle varietà a meno di omeomorfismi è troppo complicata, s'indebolisce la nozione di omeomorfismo considerando due varietà M e N come equivalenti (cobordanti) se esse costituiscono il bordo di una stessa varietà W. Questa equivalenza è operatoriale nella misura in cui, come ha mostrato Thom, l'insieme delle classi di equivalenza può essere munito di una struttura di gruppo. Quanto alla teoria di Morse, essa consiste nell'analizzare le applicazioni differenziabili $f: M \to \mathbf{R}$ di una varietà M nella retta reale. Tale teoria è presentata nell'articolo «Locale/globale» (cfr. anche «Applicazioni»). L'idea direttrice è che, benché una tale funzione $f: M \to \mathbf{R}$ possa essere estremamente complicata, tuttavia è relativamente semplice quando è *strutturalmente stabile*, vale a dire di tipo differenziabile invariante per piccole deformazioni. I due teoremi di base della teoria sono da una parte il teorema di Morse che afferma che, se M è compatta, f è strutturalmente stabile se e solo se i suoi punti critici sono non-degeneri (il che implica che siano isolati) e i suoi valori critici sono tutti distinti (caratterizzazione geometrica della stabilità strutturale), e dall'altra il teorema (corollario del teorema di trasversalità di Thom) che afferma che le applicazioni strutturalmente stabili sono *dense* (e anche generiche) dato che ogni applicazione è approssimabile da una applicazione strutturalmente stabile. Considerevolmente sviluppata da Thom, questa teoria è alla base della teoria delle catastrofi (cfr. l'articolo «Locale/globale»: nozione di dispiegamento universale). Nella misura in cui le applicazioni stabili (dette anche di Morse) $f: M \to \mathbf{R}$ sono quelle che permettono di definire una presentazione ad anse di M, tale teoria ha avuto un ruolo determinante nella dimostrazione di Smale del teorema dell'h-cobordismo che è il primo grande risultato che riguarda la congettura di Poincaré.

La congettura di Poincaré (una delle grandi congetture del secolo) domanda in quale misura, per le sfere S^n, il livello omotopico-omologico *determina* il livello topologico: se M è una varietà compatta di dimensione n semplicemente connessa ($\pi_1(M)=0$) e che ha l'omologia di S^n, è M omeomorfa a S^n? La congettura è vera per $n=2$ (dimostrazione elementare). Smale ha dimostrato che è vera per $n \geq 5$. La tecnica è un teorema sul cobordismo. Si dice che due varietà M e N sono h-cobordanti se sono il bordo di una varietà W e se le inclusioni canoniche

$M \hookrightarrow W$ e $N \hookrightarrow W$ sono delle equivalenze di omotopia. Il teorema di Smale afferma che se $\dim M = \dim N \geq 5$ e se M e N sono semplicemente connesse, allora un h-cobordismo W è necessariamente *triviale*, cioè diffeomorfo a $M \times I$. Ciò implica che M e N sono diffeomorfe. La tecnica consiste nel partire da una funzione di Morse su W definendo una presentazione ad anse e nel mostrare come si possano sopprimere progressivamente le anse (cfr. l'articolo *Unità delle matematiche* in questo stesso volume dell'*Enciclopedia*).

La considerazione delle funzioni di Morse porta al problema della classificazione delle applicazioni differenziabili $f: M \to N$ tra due varietà qualunque ($M \neq \mathbf{R}$). Queste applicazioni non sono localmente triviali quando possiedono delle *singolarità*. L'idea è quella di tentare 1) di caratterizzare geometricamente e di classificare le applicazioni strutturalmente stabili in modo da controllare le cause d'instabilità; 2) di mostrare che le applicazioni stabili sono generiche, cioè che ogni applicazione è stabilizzabile con una piccola deformazione; 3) di classificare le applicazioni instabili con un grado crescente di instabilità; 4) di utilizzare dei metodi di riduzione alla dimensione finita (tecnica dei getti) considerando le applicazioni che hanno lo stesso tipo differenziabile di uno dei loro getti di ordine finito; 5) di trattare questi problemi prima localmente (mediante germi di applicazioni) e poi globalmente (cfr. gli articoli «Locale/globale», «Applicazioni» e ♦Funzioni♦).

3. *I livelli analitici e algebrici.*

Una delle caratteristiche del livello differenziabile è che non esiste solidarietà tra il locale e il globale. Di qui l'importanza cruciale della stabilità strutturale che restaura tale solidarietà. Non accade affatto la stessa cosa per quanto riguarda i livelli molto piú vincolanti, analitico e algebrico, in cui al contrario il locale *determina* il globale. In questo caso le principali tecniche di passaggio dal locale al globale sono il prolungamento analitico e la coomologia a valori in un fascio (cfr. gli articoli «Geometria e topologia», «Invariante», «Trasformazioni naturali / categorie»). Esiste, a partire dai lavori pionieristici di Riemann, una gran quantità di relazioni di dipendenza e di determinazione reciproca tra i livelli topologico, differenziabile, analitico e algebrico. Per esempio una sottovarietà analitica di uno spazio proiettivo $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ è algebrica (teorema di Riemann per le curve e teorema di Chow per le varietà generali). Il genere di una curva algebrica piana che è il suo invariante topologico maggiore è derivabile dal grado della curva (formula di Riemann). Esso vincola anche il numero di forme differenziali di prima specie indipendenti (teorema di Riemann che stabilisce un legame tra livello topologico, livello differenziabile e livello analitico). La coomologia di una varietà differenziabile è esprimibile a partire dal teorema di Stokes in termini di forme differenziali sulla varietà (teorema di De Rham). Se la varietà è analitica, essa è anche esprimibile, ma lo è in termini di forme armoniche (teoria di Hodge che collega il livello differenziabile e il livello analitico), ecc. Tutti questi temi che costituiscono il cuore della geometria analitica e algebrica moderna oltrepassano il contenuto del gruppo di articoli qui esaminato e sono affrontati in altri articoli dell'*Enciclopedia*.

4. *Equazioni differenziali e analisi globale.*

Una delle teorie in cui la dialettica ♦locale/globale♦ è maggiormente importante è la teoria delle equazioni differenziali. Innumerevoli problemi concreti (fisica, chimica, biologia, ecc.) conducono a sistemi di equazioni differenziali definiti nel modo seguente. Il sistema considerato è definibile con un numero finito $x_1, \ldots, x_N$ di coordinate che descrivono una varietà differenziabile M di dimensione N detta spazio delle fasi del sistema. Uno stato istantaneo del sistema è dunque rappresentato da un punto x di M e l'evoluzione del sistema a partire da una condizione iniziale $x_0 \in M$ con un cammino $x(t)$ in M che parte da x_0. Assegnare una *legge* di evoluzione significa assegnare, in ogni punto x di M, un vettore velocità dx/dt in funzione di x e di t: $dx/dt = f(x,t)$. Questo vettore velocità è un vettore tangente in x a M, cioè un vettore dello spazio vettoriale tangente T_xM di M in x. Se f non dipende dal tempo (il sistema di equazioni differenziali è detto allora autonomo), assegnare una legge di evoluzione f equivale dunque ad assegnare una sezione del fibrato tangente TM di M. In generale si suppone che questa sezione sia differenziabile. Ma essa può essere piú analitica o algebrica se M è una varietà analitica o algebrica.

Data una sezione differenziabile $X(x)$ di TM (detta anche campo di vettori su M), si chiama *traiettoria* del campo X una curva differenziabile di M parametrizzata dal tempo t, la quale, in ogni punto x di M, ammette $X(x)$ come vettore velocità. Il primo teorema fondamentale della teoria afferma che se $x_0 \in M$ è una condizione iniziale, esiste sempre localmente una e una sola traiettoria passante per x_0 (principio del determinismo). Il secondo dice che sotto condizioni abbastanza generali (per esempio se M è compatta) esiste anche sempre una e una sola traiettoria globale (cioè parametrizzata da $t = -\infty$ a $t = +\infty$). In questo caso si può associare a X ciò che viene chiamato il suo flusso, vale a dire un'entità globale che sintetizza l'insieme delle traiettorie. Infatti se $t \in \mathbf{R}$, a $x \in M$ si può associare il punto x_t raggiunto alla fine del tempo t sulla traiettoria uscente da x. Per t fissato, l'applicazione $\varphi_t: M \to M$ che a x associa x_t è un diffeomorfismo di M, in altre parole un elemento $\varphi_t \in \mathrm{Diff}\,M$ in cui $\mathrm{Diff}\,M$ è il gruppo di Lie dei diffeomorfismi di M. È facile verificare che φ_0 è l'identità di M e che i diffeomorfismi φ_t soddisfano $\varphi_{t'} \circ \varphi_t = \varphi_{t'+t}$. In altre parole l'applicazione di $t \xrightarrow{\Phi} \varphi_t$ è un morfismo di gruppi di Lie tra il gruppo additivo di $\mathbf{R}$ e $\mathrm{Diff}\,M$. Reciprocamente, assegnata Φ si può ritrovare X, poiché X è la «derivata» $\left.\frac{d\varphi_t}{dt}\right|_{t=0}$ del morfismo Φ in $t = 0$.

Se si discretizza il tempo, si può considerare il diffeomorfismo $\varphi = \varphi_1$ e approssimare il sistema dinamico Φ con la successione iterata φ^n di φ.

Mentre per lungo tempo si è cercato di trovare formule *esplicite* per le traiettorie di un sistema dinamico X, dopo Poincaré si cerca di comprendere *qualita-*

tivamente la struttura del flusso Φ associato (cfr. l'articolo «Qualità/quantità»). Perciò si è portati a distinguere un approccio locale e un approccio globale. A priori si può pensare che, essendo dato un sistema dinamico X su M, le sue traiettorie siano immersioni (o almeno applicazioni iniettive) di $\mathbf{R}$ in M. Ma ciò è falso perché alcune traiettorie possono essere *critiche*. Sono possibili due casi. O la traiettoria è ridotta a un punto x_0 e allora questo punto, detto punto critico di X, è un punto di equilibrio del sistema. Per questo è necessario e sufficiente che X si annulli in x_0. Oppure la traiettoria è chiusa, vale a dire periodica. Dato che si può mostrare che, in un punto $x \in M$ in cui $X(x) \neq 0$, X è *localmente triviale* (cioè riducibile a un campo costante in un sistema appropriato di coordinate locali), si vede che lo studio di X si scompone in tre parti:

1) Lo studio locale di X nell'intorno dei suoi punti critici.
2) Lo studio semilocale di X nell'intorno delle sue traiettorie periodiche.
3) Lo studio globale di X che comprende la configurazione delle sue traiettorie critiche e lo studio *d'insieme* delle sue traiettorie non critiche.

Per quanto riguarda il primo punto, la tecnica di base consiste, in un punto critico x_0 di X, nello studiare il campo lineare X_0 tangente in x_0 a X e nel cercare sotto quali condizioni X è equivalente nell'intorno di x_0 alla sua parte lineare. Se non si ha questo caso, si cercheranno allora (come nello sviluppo di Taylor delle funzioni) delle approssimazioni piú sottili. Per quanto riguarda il secondo punto, si cercheranno in primo luogo dei criteri che permettano di garantire l'esistenza di traiettorie periodiche in un certo dominio di M. Data una tale traiettoria γ_0, lo studio di X nell'intorno di γ_0 si riduce ad uno studio locale. Sia infatti W una piccola sezione trasversa a γ_0 in x_0. L'applicazione che ad ogni punto x di W associa il punto x' in cui la traiettoria uscente da x interseca per la prima volta W è un diffeomorfismo di W che ammette x_0 come punto fisso. È dunque sufficiente analizzare questo diffeomorfismo nell'intorno di x_0 per comprendere la struttura di X nell'intorno di γ_0. Per quanto riguarda il terzo punto, si cercherà di analizzare i vincoli che la topologia di M impone alla ripartizione delle traiettorie critiche. Ma si cercherà soprattutto di analizzare il comportamento *asintotico* delle traiettorie non critiche cosí come la *stabilità* delle traiettorie. Intuitivamente una traiettoria è stabile se ogni traiettoria generata da una condizione iniziale prossima a uno dei suoi punti le resta indefinitamente prossima. Questa stabilità è essenziale per le applicazioni perché è quella che assicura che il determinismo matematico ideale del campo ha un senso concreto (cfr. l'articolo ◆Stabilità/instabilità◆). Esistono infatti dei sistemi in cui tutte le traiettorie sono instabili e che dunque sono sistemi *matematicamente deterministici* e tuttavia *concretamente stocastici*.

Infine si cercherà di applicare allo studio qualitativo dei sistemi dinamici il paradigma catastrofista sviluppato per lo studio delle applicazioni differenziabili (cfr. l'articolo ◆Locale/globale◆). Si cercherà in particolare di caratterizzare geometricamente la *stabilità strutturale* dei campi (da non confondere con la stabilità delle traiettorie), di studiare la ripartizione dei campi stabili tra i campi qualunque cosí come le possibilità di passare da un tipo di campo stabile a un altro

attraversando campi instabili (teoria della biforcazione). Si tratta di un programma immenso, di una tremenda complessità, che si trova in parte esposto negli articoli ◆Differenziale◆ e ◆Stabilità/instabilità◆.

5. *Meccanica hamiltoniana.*

Tra le equazioni differenziali, quelle che provengono dalla meccanica classica sono molto particolari. In questo caso il sistema è rappresentato da un numero finito di coordinate generalizzate $q_1, \ldots, q_n$ che percorrono uno spazio (detto spazio delle configurazioni) M e dai momenti $p_1, \ldots, p_n$ associati. Lo spazio delle fasi del sistema è allora il fibrato cotangente T^*M di M. Come è stato mostrato da Hamilton, le equazioni differenziali del secondo ordine (del tipo dell'equazione di Newton $f = m\gamma$) che regolano l'evoluzione del sistema, sono allora traducibili in un formalismo *canonico*. Se $H(q, p)$ è l'energia del sistema, energia indipendente dal tempo, e se il sistema è conservativo (non dissipativo, senza attrito), le equazioni di evoluzione sono date dalle celebri formule di Hamilton ($dq/dt = \partial H/\partial p$, $dp/dt = -\partial H/\partial q$). Ciò implica non soltanto la conservazione dell'energia, ma la conservazione del *volume* dello spazio delle fasi (teorema di Liouville). Questo fatto è fondamentale perché implica l'impossibilità per un sistema hamiltoniano di possedere attrattori e, con ciò stesso, l'esistenza di forti proprietà di *ergodicità*.

Essendo conservativi, i sistemi hamiltoniani sono strutturalmente *instabili*. Si pone dunque il problema di sapere come si stabilizzano quando si introduce della dissipazione. D'altra parte, se ci si limita ai campi hamiltoniani, alcuni campi diventano stabili. Ma non tutti. Tra i campi instabili restano in particolare i campi detti *integrabili* che possiedono un numero massimale di integrali primi indipendenti. Si pone dunque il problema di sapere come un campo integrabile può stabilizzarsi all'interno della classe dei sistemi hamiltoniani. È la teoria delle perturbazioni (cfr. l'articolo «Stabilità/instabilità»).

Si noterà infine che il formalismo hamiltoniano consiste nel pensare la meccanica in analogia con l'ottica geometrica. Ora, è noto che in ottica i raggi luminosi non sono nient'altro che le *geodetiche* per una struttura riemanniana che esprime le proprietà ottiche del mezzo. Succede la stessa cosa in meccanica. Le traiettorie definite localmente con le equazioni di Hamilton possono anche essere definite *globalmente* a partire da un principio variazionale detto principio di minima azione (cfr. l'articolo ◆Variazione◆). Si tratta in questo caso di una delle piú spettacolari equivalenze tra determinazione locale e determinazione globale.

6. *Conclusione.*

Queste poche elementari generalità sulla dialettica del locale e del globale rinviano evidentemente soltanto ad alcuni di questi aspetti. Per maggior completezza, occorrerebbe parlare in particolare: 1) dell'intervento di questa dialet-

tica in aritmetica e in teoria dei corpi di classe: si tratta in questo caso infatti di un esempio particolarmente sorprendente, profondo e operatorio di transfert di una concettualità dal suo dominio di origine a un dominio che, apparentemente, le è estraneo (si veda l'articolo ◆Locale/globale◆); 2) del ruolo considerevole che hanno le considerazioni qui appena abbozzate nell'analisi funzionale e in particolare nella teoria delle equazioni alle derivate parziali cosí fondamentale per la fisica (cfr. gli articoli ◆Differenziale◆ e ◆Funzioni◆); 3) delle tecniche di localizzazione e di globalizzazione in algebra commutativa, tecniche fondamentali per la geometria algebrica.

Si spera che queste osservazioni siano sufficienti a mostrare che l'opposizione locale/globale possiede un eminente valore categoriale, costituendo uno dei punti focali di ciò che Lautman chiamava l'*unità* (concettuale) della matematica. [J. P.].

Appelgate, H., e Tierney, M.
[1966-67] *Categories with Models*, in *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory*, Springer, Berlin - New York 1969, pp. 156-244.

Cerf, J.
1970 *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Presses Universitaires de France, Paris.

Derrida, J.
1962 Prefazione alla trad. franc. di E. Husserl, *Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie als intentional-historisches Problem*, Presses Universitaires de France, Paris.

Ellison, W. J., e Ellison, F.
1978 *Théorie des nombres*, in J. Dieudonné e altri, *Abrégé d'histoire des mathématiques (1700-1900)*, vol. I, Hermann, Paris, pp. 165-334.

Godement, R.
1964 *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris.

Goodwin, B., e Webster, J.
1982 *The origin of species: a structuralist approach*, in «Journal of Social Biology Structure», V, pp. 15-47.

Gramain, A.
1971 *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France, Paris.

Guillaume, P.
1937 *La psychologie de la forme*, Flammarion, Paris (trad. it. Editrice Universitaria, Firenze 1963).

Hatcher, A., e Wagoner, J.
1973 *Pseudo-isotopies of compact manifolds*, in «Astérisque», n. 6.

Lautman, A.
[1935-46] *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Union générale d'éditions, Paris 1977.

Milnor, J. W.
1963 *Morse Theory*, Princeton University Press, Princeton N.J.
1965 *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton University Press, Princeton N.J.

Piaget, J.
1968 *Le structuralisme*, Presses Universitaires de France, Paris 1968² (trad. it. Il Saggiatore, Milano 1968).

Serre, J.-P.
1970 *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris.

Smale, S.
1961 *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four*, in «Annals of Mathematics», LXXIV, pp. 361-406.

Differenziale

Il termine 'differenziale' è molto usato nella matematica, da solo od in connessione ad altri termini. Si parla ad esempio di calcolo differenziale, di differenziale di una funzione, di equazione differenziale, di forma differenziale.

In questo articolo verranno trattate le equazioni differenziali e le forme differenziali. Per gli altri significati con i quali il termine viene usato, il lettore è rimandato ai rispettivi articoli.

L'articolo «Differenziale» è suddiviso in quattro paragrafi nei quali, in sostanza, si esplica una suddivisione tra equazioni differenziali e forme differenziali. I primi tre paragrafi – equazioni differenziali ordinarie, equazioni alle derivate parziali, calcolo delle variazioni – sono da riferirsi alla prima parte, il quarto è interamente dedicato alle forme differenziali. Questa suddivisione viene effettuata per ragioni di chiarezza espositiva, ma può anche giustificarsi con una relativa indipendenza dei due argomenti. In effetti, mentre le equazioni differenziali sorgono contemporaneamente al calcolo differenziale, le forme differenziali sono molto piú recenti, in quanto la loro origine si colloca tra la fine del secolo scorso e l'inizio del nuovo secolo.

La suddivisione dei tre paragrafi iniziali, invece, è totalmente di carattere espositivo. Infatti i problemi che vi si trattano sono di natura molto simile. In molti casi – ad esempio nell'equazione delle corde vibranti – si passa da una formulazione nell'ambito della teoria delle equazioni differenziali ordinarie ad una formulazione come equazione alle derivate parziali. Spesso poi, nella risoluzione di un problema, si passa da un campo all'altro. Ad esempio il problema della brachistocrona si formula nell'ambito del calcolo delle variazioni e conduce poi ad un'equazione differenziale ordinaria.

Le prime equazioni differenziali ordinarie compaiono in matematica alla fine del secolo XVII e sono perciò quasi contemporanee al sorgere del calcolo differenziale. In effetti esse sono già presenti in opere di Leibniz e di Newton, cioè di coloro che tradizionalmente sono indicati come i fondatori di questo calcolo.

Naturalmente non si può parlare all'inizio di una «teoria» delle equazioni differenziali ordinarie; esse compaiono occasionalmente e sporadicamente nell'opera dei singoli ricercatori. Tuttavia ben presto vengono trattate con molta maggiore sistematicità. Si può dire che già nel secolo XVIII si configura una teoria delle equazioni differenziali come un oggetto unitario all'interno del calcolo differenziale. Nel secolo XIX e successivamente questa teoria acquisterà sempre maggiore consistenza e sistematicità, ma non altererà sostanzialmente la sua natura.

Le ricerche intorno alle equazioni differenziali sono motivate all'inizio e nel secolo successivo da numerosi problemi fisici. Vanno citati anzitutto quelli relativi alla teoria della elasticità: si tratta di trovare la forma od il movimento di travi, funi, piastre, ecc. sottoposte a sollecitazioni di varia natura. Questi

problemi erano stati trattati in maniera empirica dai costruttori medievali. Poi per opera di molti scienziati quali Galileo, Edme Mariotte, Robert Hooke ed altri, erano state formulate leggi matematiche di natura sperimentale. Ora, con l'aiuto potente del nuovo calcolo differenziale, è possibile formulare questi problemi in termini di equazioni differenziali.

Vanno ancora citati due problemi importanti del secolo XVIII: il problema della forma della Terra e quello della verifica della legge di attrazione gravitazionale di Newton. Poiché entrambi questi problemi sono connessi con il comportamento del pendolo e questo viene descritto con una equazione differenziale, si capisce come lo studio di essa debba dar luogo ad importanti sviluppi.

Va ancora citato un importantissimo campo di ricerche, e questo non solo nel secolo XVIII, ma anche successivamente: quello della meccanica celeste. Infatti la meccanica celeste è stata la prima scienza le cui leggi siano state espresse come equazioni differenziali.

Partendo da considerazioni sulle soluzioni di queste equazioni differenziali si è stati in grado, conoscendo certe informazioni circa la posizione e la velocità dei corpi ad un dato istante, di predire il verificarsi di certi fenomeni naturali, come le eclissi. Naturalmente questi successi della meccanica celeste hanno avuto una parte importante nella creazione di un modo di vedere scientifico. Si può dire che il determinismo, enunciato per la prima volta esplicitamente da Laplace, abbia avuto in essa il suo fondamento.

La seguente citazione, tratta dall'*Essai philosophique sur les probabilités* potrebbe essere utilizzata come «manifesto» del determinismo: «Un'Intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui è animata la natura e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se per di piú fosse abbastanza profonda per sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei piú grandi corpi dell'universo e dell'atomo piú leggero: nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi» [1814, trad. it. p. 243].

Non potrebbe esservi formulazione piú esplicita! Ma anche il proseguimento di essa è molto interessante, poiché mostra appunto come l'astronomia con i suoi successi si ponga a fondamento di questa concezione filosofica: «Lo spirito umano offre, nella perfezione che ha saputo dare all'astronomia, un pallido esempio di quest'Intelligenza. Le sue scoperte in meccanica e in geometria, unite a quella della gravitazione universale, l'hanno messo in grado di abbracciare nelle stesse espressioni analitiche gli stati passati e quelli futuri del sistema del mondo» [*ibid.*].

Poiché le leggi della meccanica celeste sono formulate mediante equazioni differenziali, si capisce bene l'importanza che esse vengono ad avere.

Con questo non si vuole sostenere, naturalmente, che le equazioni differenziali – come qualsiasi altra teoria matematica – possano porsi a fondamento di una concezione filosofica. È certo, però, che la teoria delle equazioni differenziali è uno degli strumenti piú importanti per l'indagine e la formulazione dei problemi fisici. Ancora dalla meccanica celeste proviene, verso la fine del se-

colo scorso, un importante impulso per la evoluzione della teoria delle equazioni differenziali.

Un problema fondamentale della meccanica celeste è quello degli n corpi, cioè della determinazione del movimento di n corpi di masse date soggetti all'attrazione gravitazionale. Si tratta di una idealizzazione del movimento del sistema solare. Questo problema può essere tradotto in un sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

che, per la sua forma particolare – nelle f_i non compare il tempo – viene detto sistema autonomo.

In base al teorema di esistenza ed unicità, le equazioni della meccanica celeste – essendo dotate di molte proprietà specifiche, quale ad esempio l'esistenza di un integrale dell'energia – ammettono una ed una sola soluzione, quando vengano specificate le condizioni iniziali in un certo istante di tempo.

Da un certo punto di vista, quindi, noi «abbiamo» la soluzione del problema; si tratta di integrare il sistema. Ma «integrare il sistema» in questo caso può voler dire molto poco. Infatti anche nei casi fortunati in cui questo è possibile con funzioni elementari, si ottengono espressioni cosí complicate da essere praticamente inutilizzabili.

Anche il tentativo di fornire la soluzione mediante sviluppi in serie si rivela inefficace, poiché le serie-soluzione possono convergere cosí lentamente da essere del tutto inutili.

Poi, i metodi che abbiamo accennato sono in linea di principio insoddisfacenti dal punto di vista dell'astronomia, anche quando venissero potenziati con i moderni strumenti di calcolo. Infatti la richiesta tipica, in questo caso, non è quella di avere soluzioni in un dato intervallo, ma di avere soluzioni in grande.

Si pone cosí uno dei temi piú importanti della teoria qualitativa delle equazioni differenziali: determinare le proprietà delle soluzioni direttamente dalle equazioni differenziali, senza passare attraverso le soluzioni.

Vanno segnalati tuttavia due casi nei quali la situazione è diversa: il caso importantissimo dei due corpi che verrà trattato in un apposito paragrafo, mostrando come dalla legge di Newton si deducano le leggi di Keplero, e la soluzione particolare del problema dei tre corpi data da Lagrange (1772).

La soluzione di Lagrange mostra la possibilità di un movimento uniforme lungo orbite circolari, in un piano fisso, a partire da una configurazione nella quale i tre corpi occupano i vertici di un triangolo equilatero. Questa soluzione, giudicata poco significativa dallo stesso Lagrange, ha trovato interesse recentemente poiché si è osservato come il Sole, Giove, ed i pianeti del gruppo troiano formino approssimativamente un triangolo equilatero. Diviene cosí importante studiare il comportamento di soluzioni «vicine» a quella lagrangiana.

Un contributo importante all'evolversi della teoria qualitativa delle equazioni differenziali verrà, nel XX secolo, da radio-fisica e radio-ingegneria.

Nella teoria classica si poneva in maniera naturale il problema dell'esistenza

di soluzioni oscillanti, collegate a fenomeni meccanici nei quali le oscillazioni erano un fenomeno da evitare. Nel campo della radio-fisica e della radio-ingegneria si ha spesso il fenomeno contrario: è molto importante generare oscillazioni. Poiché spesso i dispositivi utilizzati per generare oscillazioni sono indipendenti dal tempo, si capisce come, descritti con equazioni differenziali che nella maggior parte dei casi non sono lineari, diano luogo a sistemi autonomi, non-lineari, appunto.

La esigenza di una teoria qualitativa delle equazioni differenziali fu avvertita con grande chiarezza da Henri Poincaré, il quale ebbe a scrivere: «Lo studio completo di una funzione comprende due parti: 1) una parte qualitativa (per cosí dire) o studio geometrico della curva definita dalla funzione; 2) una parte quantitativa o calcolo numerico dei valori della funzione.

«Cosí per esempio, per studiare una equazione algebrica si comincia con il ricercare, con l'aiuto del teorema di Sturm, quale è il numero delle radici reali: è la parte qualitativa; poi si calcola il valore numerico delle sue radici, ciò che costituisce lo studio quantitativo della equazione.

«Allo stesso modo, per studiare una curva algebrica, si comincia con il "costruire" questa curva, come si dice nel corso di Matematiche Speciali, cioè si cercano i rami di curva chiusa, i rami infiniti eccetera. Dopo questo studio qualitativo della curva se ne possono determinare esattamente un certo numero di punti. È, naturalmente con la parte qualitativa che si deve abbordare la teoria di ogni funzione ed è per questo che il problema che si presenta in primo luogo è costruire le curve definite dalle equazioni differenziali... D'altro lato questo studio qualitativo avrà di per sé un interesse di prim'ordine... Prendiamo per esempio il problema dei tre corpi: non ci si può domandare se uno dei corpi resterà sempre in una certa regione del cielo o se potrà allontanarsene indefinitamente; se la distanza dei corpi aumenterà o diminuirà all'infinito o se resterà compresa entro certi limiti? Non ci si possono porre mille questioni di questo genere che saranno tutte risolte quando si saprà costruire qualitativamente le traiettorie dei tre corpi?» [1901, ed. 1928 p. XXII].

In precedenza egli aveva anche osservato: «Una teoria completa delle funzioni definite dalle equazioni differenziali sarebbe di grande utilità in un gran numero di questioni di matematica pura o di meccanica. Purtroppo, è evidente che, nella grande generalità dei casi che si presentano, non si può integrare queste equazioni con l'aiuto di funzioni già conosciute, per esempio con l'aiuto di funzioni definite con le quadrature. Se ci si volesse dunque restringere ai casi che si possono studiare con integrali definiti o indefiniti, il campo delle nostre ricerche sarebbe singolarmente diminuito, e l'immensa maggioranza delle questioni che si presentano nelle applicazioni resterebbe insolubile.

«È dunque necessario studiare le funzioni definite dalle equazioni differenziali in se stesse e senza cercare di ricondurle a funzioni piú semplici, cosí come si è fatto per le funzioni algebriche, che si era cercato di ricondurre ai radicali e che si studiano ora direttamente, cosí come si è fatto per gli integrali dei differenziali algebrici, che ci si è sforzati per lungo tempo di esprimere in termini finiti» [1881, p. 375].

Anche le equazioni alle derivate parziali, come le equazioni differenziali ordinarie, sono quasi contemporanee al sorgere del calcolo differenziale.

È molto importante rilevare questo fatto. I problemi del calcolo differenziale sono quasi tutti presenti fin dall'inizio anche se talvolta, naturalmente, in forma rudimentale. Problemi di equazioni differenziali ordinarie, di equazioni alle derivate parziali, di calcolo delle variazioni, di calcolo integrale, ecc. sono presenti nell'opera dei ricercatori del secolo XVIII «tutti assieme».

Con i successivi sviluppi del calcolo differenziale, questi argomenti si differenzieranno in teorie separate; ognuno di questi argomenti diverrà oggetto di trattazioni specialistiche, ed anzi si porranno anche ulteriori suddivisioni. Oggi, per esempio, abbiamo interi trattati sulle equazioni alle derivate parziali di un particolare tipo, come le equazioni ellittiche, trattati sulle funzioni-soluzione di una particolare equazione differenziale, sulle funzioni ellittiche, sui polinomi di Legendre.

Però, per intendere bene lo sviluppo ed il concetto del calcolo differenziale occorre avere ben presente come queste teorie siano *suddivisioni di una unità originaria* e non oggetti diversi scollegati fra loro, come può succedere di pensare quando se ne affronta lo studio su trattati organizzati in maniera specialistica.

Anche per le equazioni alle derivate parziali le maggiori motivazioni si hanno all'inizio in riferimento a problemi fisici.

In effetti la teoria delle equazioni alle derivate parziali risente in maniera notevolissima dei contatti con la fisica. Infatti la fondamentale «classificazione» delle equazioni alle derivate parziali – della quale si vedranno nel § 2.2 gli aspetti tecnici, soprattutto in riferimento alle equazioni del secondo ordine – è fondata sulla diversa natura dei fenomeni fisici che vengono descritti. Si vedrà come le equazioni alle derivate parziali possano suddividersi in «iperboliche», «ellittiche» e «paraboliche». Le prime descrivono fenomeni di propagazione ondosa: tipica in questo senso è l'equazione della corda vibrante, o piú in generale l'equazione delle onde. Le equazioni paraboliche descrivono invece fenomeni di lenta diffusione: ancora tipica in questo senso è l'equazione del calore. Delle equazioni ellittiche si tratterà in maniera abbastanza dettagliata nel § 2.3, cui è rimandato il lettore che voglia farsi un'idea precisa dello stretto contatto esistente tra matematica e fisica, e al tempo stesso della natura delle equazioni ellittiche. Basterà qui osservare che esse descrivono fenomeni stazionari.

Tornando ad un'argomentazione piú legata alla tecnica della descrizione matematica, si vuol qui osservare come, talvolta, un problema fisico, trattato dapprima in forma drasticamente semplificata, dia origine a un'equazione differenziale ordinaria. Trattato poi in forma meno schematica, esso fornisce un'equazione alle derivate parziali. Un esempio molto illuminante è quello dell'equazione delle corde vibranti.

Questo problema è anche importante poiché diede origine nel XVIII secolo a un'aspra polemica, la quale riguardava in sostanza la possibilità di rappresentare una funzione arbitraria mediante una serie trigonometrica. Questa possibilità era sostenuta da Daniele Bernoulli, il quale portava motivi fisici a sostegno

di questa tesi, ed era invece aspramente osteggiata da molti dei migliori matematici del tempo, quali Eulero e d'Alembert. Questa polemica ebbe molta importanza per lo sviluppo del concetto di funzione e praticamente segnò l'inizio di quell'ordine d'idee che condusse alla serie di Fourier.

Il fatto cui si è accennato – di come un'equazione alle derivate parziali possa presentarsi come una formulazione piú «sofisticata» di un problema – può suggerire l'idea che la teoria delle equazioni alle derivate parziali sia una generalizzazione della teoria delle equazioni differenziali ordinarie; e questo in un certo senso è vero, non foss'altro che per il fatto che un'equazione differenziale ordinaria è una particolare equazione alle derivate parziali. Però il fatto che una teoria possa essere considerata una generalizzazione di un'altra non esaurisce affatto il problema del rapporto tra le teorie, il quale va inteso in modo dialettico, e non di semplice subordinazione.

Per esempio – in un altro contesto – una struttura matematica molto importante, quella di categoria, è un caso particolare di un'altra struttura, quella di grafo, ma questo non significa affatto che la teoria delle categorie possa in qualche modo essere vista come un caso particolare della teoria dei grafi. Vi sono dei problemi tipici di teoria delle categorie assolutamente impensabili in termini di grafi.

Cosí per le equazioni alle derivate parziali si può osservare come i numerosi successi ottenuti con il metodo della separazione di variabili, che riducono l'equazione ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie, suggerirà, verso la metà dell'Ottocento, l'opinione che un'equazione alle derivate parziali sia una formulazione compatta di un sistema di equazioni differenziali ordinarie e che quindi la teoria delle equazioni alle derivate parziali debba subordinarsi a quella delle equazioni differenziali ordinarie.

Dopo questo accenno alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie e a quella delle equazioni alle derivate parziali, qualche considerazione ora su un'importante categoria del pensiero matematico, l'opposizione lineare/non-lineare. Essa si esplica in vari campi della matematica; si parla di equazioni differenziali lineari e non-lineari, di equazioni alle derivate parziali lineari e non-lineari, di equazioni algebriche lineari e non-lineari. Per cogliere dunque nella sua specificità il senso di questa opposizione occorre riferirsi alle trattazioni tecniche che verranno date successivamente. Tuttavia è certamente utile premettere qualche osservazione.

La trattazione «lineare» di un problema si riferisce «grosso modo» ad una sua fase preliminare, nella quale vengono effettuate notevoli semplificazioni, e questo non è certo peculiare della matematica, poiché in ogni scienza si considerano, dapprima, modelli semplificati. Ma ciò che è tipicamente riflesso nella opposizione lineare/non-lineare è la consapevolezza di come un piccolo incremento quantitativo, pur alterando il fenomeno esaminato, non ne alteri il comportamento «qualitativo». Si parla in questo caso di «perturbazione» del procedimento lineare. Un maggiore incremento quantitativo altera invece sostanzialmente il fenomeno in esame. Si passa alla fase non-lineare. Nel caso poi che un fenomeno venga descritto in forma differenziale

– la differenziazione essendo in effetti un procedimento di linearizzazione –, si ha che la prima fase esplicativa è «lineare» in senso tecnico, descritta cioè con algoritmi di primo grado. Nelle fasi piú approfondite tale particolarità va naturalmente perduta. Questo fenomeno verrà descritto con un esempio molto semplice – l'equazione di sviluppo della popolazione – nel paragrafo introduttivo alle equazioni differenziali.

Anche il calcolo delle variazioni, all'inizio, era indistinguibile dal calcolo differenziale vero e proprio. I nomi di molti dei matematici che possono riguardarsi come i fondatori del calcolo differenziale sono legati ai primi problemi classici del calcolo delle variazioni. Un primo problema fu posto dallo stesso Newton: quello della forma migliore da dare ad un oggetto che debba muoversi in un fluido per vincerne la resistenza. Un altro problema molto celebre (cfr. § 3.1) fu posto da Giovanni Bernoulli nel 1696 sugli «Acta Eruditorum»: quello della brachistocrona. Soltanto nel secolo XVIII, con Eulero e Lagrange, il calcolo delle variazioni diverrà una disciplina autonoma.

Va osservato ancora come nel secolo XVIII il calcolo delle variazioni verrà a legarsi a principî scientifici e filosofici di grande importanza riassumibili nella formulazione di leggi naturali che esprimono in qualche modo l'«economicità» della natura.

Già nell'antichità classica si trovano formulate leggi naturali di questo tipo. Ad Erone si deve la legge seguente: la luce, proveniente da una sorgente P si riflette su uno specchio R e giunge ad un punto Q in modo che il percorso PRQ sia il piú breve possibile.

La formulazione di leggi naturali nello stesso ordine di idee, sia in casi specifici sia come principî generali, dall'antichità classica trascorre in tutta la tradizione scientifica fino al secolo XVII. A partire da questo periodo, la possibilità di disporre di strumenti matematici piú potenti permette di formulare dei «principî» piú generali e penetranti.

Il principio del minimo tempo di Fermat è in accordo con la legge di rifrazione della luce. Se v_1 e v_2 rappresentano le velocità della luce in due mezzi differenti ed i e r rappresentano gli angoli d'incidenza, da questo principio si deduce la legge

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}.$$

Anche la dinamica newtoniana – che stabilisce come la linea retta, cioè la piú breve distanza, sia il moto naturale di un corpo – può interpretarsi come un principio nello stesso ordine di idee.

Una prima formulazione di un principio di portata molto generale, tale da potersi ritenere esplicativo di gran parte dei fenomeni naturali, fu formulato da Maupertuis: il principio di minima azione. Questo principio, formulato dall'autore in maniera non ancora del tutto chiara dal punto di vista matematico, sebbene completamente intelligibile dal punto di vista filosofico, fu utilizzato con successo soprattutto da Lagrange, per ricavare le sue celebri equazioni di movimento.

Le equazioni di Lagrange verranno trattate piú avanti (§ 3.3), insieme con il principio di Hamilton. Anche quest'ultimo è di grandissima importanza per la grande quantità di fenomeni meccanici, elettromagnetici, di relatività che riesce a riassumere. Va osservato tuttavia come quest'ultimo principio fu inteso, dallo stesso Hamilton, cosí come è inteso ancor oggi, con un ruolo assai piú modesto di quanto non pensasse Maupertuis. Non si tratta di cogliere una legge universale della natura, ma semplicemente un punto di vista unitario per descriverne i fenomeni. Questo fatto è spiegabile osservando come, quando Hamilton elabora le sue teorie matematiche (intorno al 1830), sia ormai sopravvenuto un completo mutamento negli ideali e nelle prospettive scientifiche rispetto al secolo XVIII. L'indagine intorno ai fenomeni naturali ha acquistato una molto maggiore problematicità.

Si è già avuto occasione di osservare come le forme differenziali si presentino in matematica in epoca abbastanza recente, precisamente verso la fine del secolo scorso.

Il maggiore contributo, se non addirittura l'«invenzione» della loro teoria, proviene da Elie Cartan, il quale ebbe occasione di considerarle in connessione al «problema di Pfaff». Sarà quindi opportuno illustrare brevemente questo problema. Sia una «forma differenziale»

$$w=X_1dx_1+X_2dx_2+\ldots+X_ndx_n$$

in cui $X_1, \ldots, X_n$ sono funzioni delle variabili $x_1, \ldots, x_n$; e si consideri l'equazione

$$w=X_1dx_1+X_2dx_2+\ldots+X_ndx_n=0.$$

Può succedere che la forma differenziale w sia esattamente il differenziale di una funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, avendosi in tal caso $X_1=\partial f/\partial x_1, \ldots, X_n=\partial f/\partial x_n$ oppure, piú in generale, può essere $Mw=df$. In questo caso la piú generale «soluzione» dell'equazione $w=0$ è data da $f(x_1, \ldots, x_n)=\text{cost}$. Però può accadere che w non sia pensabile in questo modo, ossia che non esista alcuna M tale che $Mw=df$. Che senso bisogna dare allora ad un'equazione del tipo

$$X_1dx_1+X_2dx_2+\ldots+X_ndx_n=0?$$

Verso la fine del Settecento Eulero, nelle *Institutiones calculi integralis*, considerando la particolare equazione

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

conclude senz'altro che quest'equazione è priva di senso se non vi è un moltiplicatore M in modo che $M(Pdx+Qdy+Rdz)$ sia un differenziale. Afferma perentoriamente: «Se non esistesse un tale moltiplicatore l'equazione differenziale proposta sarebbe assurda» [1768, III, p. 9].

Il punto di vista di Eulero è perfettamente corretto; se però s'intende come soluzione, nel caso ad esempio delle tre variabili, una superficie, cioè una soluzione data da un'*unica* equazione. Tra la fine del Settecento e l'inizio del-

l'Ottocento s'imporrà tuttavia la necessità d'intendere le soluzioni in maniera piú generale. Ad esempio, nel caso dell'equazione considerata da Eulero, si potrebbero cercare soluzioni di dimensione minore, ad esempio delle curve. Cosí l'equazione $dy - z\,dx = 0$, che non ha soluzioni nel senso di Eulero, ha come soluzioni nel nuovo senso le curve date dalle *due* equazioni $y = f(x)$ e $z = f'(x)$ con f funzione arbitraria. Si hanno dunque come soluzioni infinite curve, ottenute al variare di f; la soluzione in senso classico appare ora come corrispondente al particolare fenomeno per il quale queste curve dovrebbero descrivere una superficie.

Verso l'inizio dell'Ottocento Pfaff pose in forma chiara questo punto di vista. Data l'equazione

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n = 0$$

si tratta di verificare non se essa ha soluzioni del tipo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{cost}$, ma piuttosto di cercare le soluzioni di dimensione massima. Pfaff ebbe modo di mostrare come un'equazione in $2n$ o $2n-1$ variabili ha sempre come soluzione un sistema di equazioni (varietà integrali) in numero non piú grande di n. Nel caso delle tre variabili si hanno soluzioni rappresentate da al piú due equazioni, cioè almeno delle curve. Il problema fu affrontato successivamente da molti dei migliori matematici i quali diedero importanti contributi soprattutto per quanto riguarda la esprimibilità delle soluzioni. [Per la storia del problema di Pfaff durante l'Ottocento si può consultare ad esempio Forsyth 1890. Per una trattazione in un certo senso conclusiva cfr. Goursat 1922].

Come si è visto sopra, l'introduzione delle forme differenziali è dovuta ad Elie Cartan, il quale scrive nell'articolo *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff*: «Il presente lavoro costituisce una esposizione del problema di Pfaff fondata sulla considerazione di certe espressioni differenziali simboliche, intere ed omogenee in rapporto ai differenziali di n variabili, con i coefficienti funzioni qualsiasi di queste variabili. Queste espressioni possono essere sottoposte alle regole ordinarie del calcolo a condizione di non scambiare l'ordine dei differenziali in un prodotto. Il calcolo di queste quantità è, insomma, quello delle espressioni differenziali che sono poste sotto un segno di integrale multiplo. Questo calcolo presenta numerose analogie con il calcolo di Grassmann; è dunque identico al calcolo geometrico di cui si serve Burali-Forti in un libro recente...

«Nel caso di una espressione di primo grado di Pfaff, si può associarle un'altra espressione differenziale di secondo grado, che è un covariante in rapporto ai cambiamenti di variabile e che non è altro che il covariante bilineare di Frobenius e di Darboux. Io la chiamo la *derivata* della espressione di Pfaff. Ma grazie alla nozione delle espressioni differenziali simboliche, questo covariante è il primo termine di una successione di covarianti simbolici di terzo, quarto, ... grado che si deducono dalla espressione di Pfaff e dalla sua derivata con delle moltiplicazioni; esse costituiscono la derivata seconda, terza, ... della espressione di Pfaff, la derivata p-esima essendo di grado $p+1$» [1899, ed. Gauthier-Villars p. 305].

Come si vede, Cartan introduce accanto alle forme differenziali anche l'operazione di derivata; oggi si preferisce chiamarla «differenziale esterno». Nel seguito, quando si tratterà delle forme differenziali (§ 4) verranno impiegate la terminologia e la notazione moderne.

Concludendo, va ribadita la necessità di considerare il calcolo differenziale di cui si è delineato qualche aspetto, come un oggetto unitario *inseparabile* dalla sua evoluzione, la quale sola, permettendo di cogliere le linee di sviluppo, può guidare le ulteriori ricerche.

1. *Equazioni differenziali.*

1.1. Esempi, definizioni.

Un primo esempio fondamentale è dato dalla dinamica del punto materiale. Questo esempio è implicito nei *Principia* di Newton, nel quale libro l'autore preferí non servirsi del calcolo differenziale, giudicandolo non sufficientemente rigoroso. Se x, y, z indicano le coordinate di un punto P di massa m il quale è sottoposto ad una forza $\mathbf{f}$ di componenti f_1, f_2, f_3 e se s'immagina ulteriormente che il sistema sia variabile in funzione del tempo t, si hanno le equazioni

$$\frac{d^2x}{dt^2} = mf_1 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = mf_2 \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = mf_3 .$$

Se, come in molti casi, s'immagina che la forza $\mathbf{f}$ abbia componenti che dipendono dalla posizione del punto, dalla velocità e dal tempo, le equazioni possono esser poste nella forma:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = f_1\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right) \\[2ex] m\dfrac{d^2y}{dt^2} = f_2\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right) \\[2ex] m\dfrac{d^2z}{dt^2} = f_3\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right). \end{cases}$$

e si ottiene ciò che si dice un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine.

Un altro esempio, tra i primi presentatisi nella storia del calcolo differenziale, è dato dalla isocrona. Si tratta di trovare una curva lungo la quale un pendolo impieghi lo stesso tempo nel fare una oscillazione completa tanto scivolando lungo un arco lungo quanto scivolando lungo un arco breve.

Giacomo Bernoulli nel 1690 ottenne l'equazione differenziale della curva nella forma:

$$\sqrt{b^2y - a^3}\, dy = \sqrt{a^3}\, dx$$

Dall'uguaglianza dei due differenziali, Bernoulli concluse che gli «integrali» (termine usato per la prima volta) dovevano essere uguali e cosí ne concluse la soluzione:

$$(2b^2y-2a^3)\sqrt{b^2y-a^3}=3b^2\sqrt{a^3}x.$$

Si tratta, come è noto, di una cicloide.

Un altro esempio, dovuto ancora a Giacomo Bernoulli, è quello della brachistocrona. Dati nel piano due punti P e Q (fig. 1), si tratta d'individuare la linea che deve percorrere un corpo pesante per scendere da P a Q nel minor tempo possibile. Se si assume il riferimento come nella figura indicata si trova facilmente che il tempo necessario per percorrere il tratto PQ è dato da

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dy.$$

Si tratta perciò di determinare una funzione $y(x)$ in modo che questo integrale abbia valore minimo. Come si vedrà trattando del calcolo delle variazioni, questa condizione dà luogo all'equazione differenziale

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=c$$

ossia

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=c$$

da cui si ottiene ancora come soluzione una cicloide (cfr. oltre, § 3.1). Il fatto che i due problemi diano luogo alla stessa soluzione fu naturalmente accolto con molto stupore e fu oggetto di vivaci scambi di corrispondenza, secondo l'uso dell'epoca.

Ecco ora un esempio assai piú moderno, illustrato con maggiori dettagli poiché è assai semplice ed al tempo stesso si presta bene ad una discussione metodologica.

Si consideri una popolazione di organismi di una certa specie, la quale sia

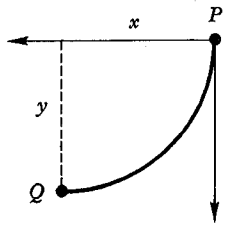


Figura 1.

Problema della brachistocrona: un corpo pesante deve percorrere la linea PQ nel piú breve tempo possibile.

costituita al tempo iniziale, $t=0$, da n membri, e si indichi con $y(t)$ il numero degli individui al tempo t. Ovviamente $y(t)$ è un numero intero, tuttavia si farà l'ipotesi che $y(t)$ sia una funzione continua e differenziabile di t. Si supponga inoltre che la rapidità di cambiamento della popolazione al tempo t dipenda solamente dallo stato della popolazione al tempo t e non da quanto accade prima. Esattamente, si supponga che in un intervallo di lunghezza h vi sia la probabilità p che ogni individuo faccia nascere un nuovo individuo. Da queste ipotesi si ottiene:

$$y(t+h)-y(t)=p\cdot h\cdot y(t)$$

e allora

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h}=p\cdot y(t).$$

Da questa equazione, facendo tendere h a zero, si ha l'equazione differenziale $y'=p\cdot y(t)$. Si osserva ora molto facilmente che

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{d}{dt}\log(y(t))$$

e perciò

$$\frac{d}{dt}\log(y(t))=p$$

cioè

$$\log(y(t))=pt+C$$
$$y(t)=e^{pt+C}.$$

La costante C che compare nella formula trovata può essere ricavata osservando che per $t=0$ deve essere $y(0)=n$ e perciò $y(0)=e^C=n$. Si ha quindi:

$$y(t)=n\cdot e^{pt}.$$

Questa è quindi la soluzione del problema che ci siamo posti. La soluzione ci dice che la popolazione cresce esponenzialmente al crescere di t. Si osservi però come questo risultato non è affatto legato alla natura del problema che ci siamo posti, è semplicemente il frutto di drastiche semplificazioni. Con diverse ipotesi si potrebbero ottenere equazioni differenziali ben differenti, interpretabili in maniera opposta! Se supponiamo, ad esempio, che i mezzi di sussistenza diminuiscano al crescere della popolazione, possiamo assumere l'ipotesi

$$y'(t)=p\cdot y(t)-q\cdot y^2(t)$$

introducendo il fattore «malthusiano» $-q\cdot y^2(t)$. Cosa significa l'introduzione di questo fattore? Fin tanto che $y(t)$ si mantiene «piccola» la quantità $y^2(t)$ può essere trascurata, e sostanzialmente il fenomeno è governato da una equazione simile a quella che abbiamo considerata in precedenza. La cosa divie-

ne sostanzialmente diversa quando non è piú possibile trascurare la quantità $y^2(t)$; allora il fattore $-q \cdot y^2(t)$ altera il comportamento in modo essenziale.

Questa equazione fornisce un esempio tipico di come un fenomeno possa dapprima essere descritto in modo lineare, successivamente «perturbato» e poi divenire un tipico fenomeno non-lineare. In questo caso, l'equazione, valida in prima approssimazione,

$$y'(t) = p \cdot y(t)$$

corrisponde alla descrizione lineare. L'equazione

$$y'(t) = p \cdot y(t) - q \cdot y^2(t)$$

considerata per $y(t)$ sufficientemente piccolo corrisponde alla descrizione perturbata. Infine la stessa equazione considerata per $y(t)$ qualsiasi corrisponde al fenomeno non-lineare. La figura 2 dovrebbe essere esplicativa di quanto esposto. Volendo esplicitare dal punto di vista matematico il caso non-lineare e calcolando, sempre assumendo come valore iniziale $y(0) = n$, la soluzione, si trova questa volta

$$y(t) = \frac{np}{(p - nq)e^{-pt} + nq}.$$

Questa soluzione, per $q = 0$, si riduce a quella precedente. Se $q \neq 0$ il comportamento della soluzione è notevolmente diverso. Si ha per esempio

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{p}{q}.$$

La popolazione, invece di crescere indefinitamente, tende a stabilizzarsi intorno al valore p/q. La trattazione non-lineare è dunque sensibilmente diversa!

L'esempio presentato si presta bene ad un'ulteriore osservazione. Dall'equazione differenziale $y'(t) = p \cdot y(t)$ si è ricavata la soluzione generale

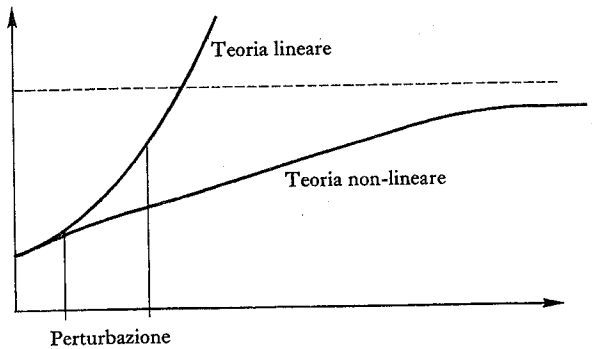


Figura 2.
L'opposizione lineare/non-lineare e la perturbazione.

$y(t) = e^{pt+C}$, cioè una famiglia di funzioni. Solo successivamente si è determinata una soluzione particolare imponendo una condizione iniziale: $y(0) = n$. Questo fatto è del tutto generale: la soluzione di un'equazione differenziale è data da una famiglia di funzioni. Con maggiore precisione si può dire che questa famiglia dipenderà da tanti parametri quanto è l'ordine della piú alta derivata che compare nell'equazione differenziale. Prima di dare a queste osservazioni una forma piú precisa e rigorosa mostriamo con un ultimo esempio come, viceversa, da una famiglia di funzioni dipendente da un parametro si determini un'equazione differenziale.

Si consideri la famiglia delle circonferenze con centro nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano $x^2 + y^2 = \lambda$. Se in questa equazione si pensa la y come funzione della variabile x e si deriva rispetto ad x, si ha $2x + 2yy' = 0$ e quindi si ottiene l'equazione differenziale $y' = -(x/y)$.

Prima di procedere è ora necessario dare un certo numero di definizioni e fissare una certa terminologia.

DEFINIZIONE. *Un'equazione differenziale del primo ordine è una relazione della forma $f(x, y, y') = 0$, ove f è una funzione definita in un certo insieme $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$.*

Per soluzione di quest'equazione differenziale s'intende una funzione $y(x)$ tale che si abbia identicamente $f(x, y(x), y'(x)) = 0$.

In modo analogo si definisce un'equazione differenziale di ordine n come una relazione della forma $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ ove questa volta la funzione f è definita su un sottoinsieme di $\mathbf{R}^{n+1}$.

Per soluzione generale (o integrale generale) dell'equazione differenziale di ordine n s'intende una funzione $y = (x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ dipendente da n parametri indipendenti, tale che y soddisfi identicamente l'equazione differenziale. Ad esempio: se si considera l'equazione differenziale del secondo ordine $y'' = 0$, questa ha per soluzione generale $y = c_1 x + c_2$. Una soluzione che si ottenga dalla soluzione generale assumendo certi valori $c_1, c_2, \ldots, c_n$ viene detta integrale particolare.

Nell'esempio molto semplice considerato, $y'' = 0$, la soluzione generale descrive *tutte* le soluzioni. Questo però, in generale, non accade. Vi possono essere delle soluzioni dell'equazione differenziale che non sono ottenibili nella forma di integrali particolari. Questo può succedere, per esempio, per valori limite dei parametri che compaiono nella soluzione generale. Si consideri ad esempio la famiglia di parabole $x^2 + \lambda y = 0$. A questa famiglia appartiene anche (per $\lambda \to \infty$) la retta $y = 0$. In effetti, se si elimina il parametro λ si ottiene l'equazione differenziale $xy' + 2y = 0$, la quale ha anche la soluzione $y = 0$. Questa soluzione non è un'integrale particolare.

1.2. Equazioni differenziali elementari.

In questo paragrafo vengono considerati alcuni esempi di equazioni differenziali, tra i piú semplici e tra i primi presentatisi storicamente.

Equazione a variabili separabili: quando l'equazione differenziale ha la

forma $f(x)+g(y)y'=0$, il problema della ricerca della soluzione generale si risolve immediatamente nella forma

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt+\int_{y_0}^{y} g(t)\,dt=\text{cost.}$$

Equazione differenziale lineare: è un'equazione della forma $y'+f(x)y+$ $+g(x)=0$. Se si effettua la sostituzione $y=pq$, si ha $y'=p'q+q'p$; sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$(p'q+q'p)+f(x)pq+g(x)=0.$$

Riorganizzata l'espressione nella forma

$$p(q'+f(x)q)+p'q+g(x)=0,$$

è ora possibile scegliere la funzione q in modo che $q'+f(x)q=0$, ed a tal fine basta osservare che q'/q è la derivata di $\log|q|$. Determinata cosí la funzione q e tornando all'equazione differenziale, si ottiene semplicemente $p'q+g(x)=0$, che si risolve immediatamente. Note le due funzioni p e q è data la y da pq.

Equazione di Riccati: è un'equazione della forma

$$y'+f(x)y^2+g(x)y+h(x)=0.$$

Questa equazione è molto importante per due motivi. Essa è stata ottenuta da Jacopo Riccati effettuando un cambiamento di variabili, a partire da una equazione del secondo ordine: è dunque uno dei primi esempi di tentativi di risolvere un'equazione differenziale riducendone l'ordine con un cambiamento di variabili. In secondo luogo l'equazione di Riccati ***non*** può, in generale, essere risolta mediante integrazione. Negli esempi considerati in precedenza, l'equazione differenziale, dopo un certo numero di manipolazioni, era ricondotta ad una forma tale che la ricerca delle soluzioni comportava semplicemente una o piú integrazioni. Si poteva quindi immaginare che questo fatto fosse del tutto generale; che una scelta opportuna della sostituzione da effettuare riducesse l'equazione ad una risolubile elementarmente, cioè mediante integrazioni. Ora questo fatto si dimostra impossibile: l'equazione di Riccati non può essere risolta mediante integrazione. Va notato, tuttavia, che se si conosce una soluzione particolare p, si può trovare la soluzione generale. Infatti con il cambiamento di variabili $y=p+z$ l'equazione si riduce ad una di Bernoulli.

Non sembra necessario aggiungere ulteriori esempi di equazioni differenziali integrabili elementarmente perché, chiara ormai la problematica, il lettore interessato può fare riferimento a testi specializzati [cfr. per esempio Coddington e Levinson 1955]. Per lo stesso motivo non si tratterà neppure delle equazioni differenziali lineari in generale.

1.3. Teoremi di esistenza.

Come si è accennato all'inizio, le prime equazioni differenziali considerate erano direttamente collegate a problemi fisici, ed era quindi chiaro come, se queste equazioni riflettevano correttamente la realtà fisica, non vi dovessero essere dubbi sull'esistenza di soluzioni. In molti casi semplici, poi, queste soluzioni erano calcolabili direttamente mediante quadrature.

Il problema della «esistenza» della soluzione di una equazione differenziale si pone verso la fine del Settecento ed i primi anni dell'Ottocento quando la classe di equazioni differenziali considerate diviene molto piú estesa e comprende anche equazioni di un tipo che non può essere immediatamente ricondotto ad un problema fisico, ma che pare perfettamente analogo a quello di equazioni differenziali che invece sono ottenute a partire da problemi fisici.

Il tentativo di risolvere equazioni alle derivate parziali mediante sostituzioni di variabili dà luogo a numerose equazioni differenziali non incontrate in precedenza. Ad esempio, se si considera l'equazione delle onde (cfr. oltre, § 2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

la ricerca di soluzioni della forma

$$u=u(r,\vartheta,z,t)=R(r)\,\Theta(\vartheta)\,Z(z)\,T(t)$$

conduce al sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2R}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dR}{dr}-\dfrac{m^2}{r^2}R+n^2R=0 \\[2ex] \dfrac{d^2\Theta}{d\vartheta^2}=-m^2\Theta \\[2ex] \dfrac{d^2Z}{dz^2}=-q^2Z \\[2ex] \dfrac{d^2T}{dt^2}=-c^2p^2T \\[2ex] n^2=p^2-q^2. \end{cases}$$

La prima equazione, riscritta con variabili x ed y è $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$, ed è nota come equazione di Bessel.

In modo analogo si ottiene l'equazione differenziale di Legendre, a partire dall'equazione di Laplace, cioè l'equazione

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0.$$

Entrambe queste equazioni appartengono al tipo piú generale

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0.$$

Se per le equazioni di Bessel e di Legendre l'esistenza di soluzioni può essere chiara per motivi fisici, non vi è ragione di supporre la stessa cosa per questa ultima equazione. Nasce cosí la problematica dei «teoremi di esistenza».

Questa problematica, naturalmente, non si pose all'improvviso con chiarezza. Il patrimonio di equazioni differenziali non fu arricchito di colpo introducendo uno studio sistematico delle equazioni differenziali. Dapprima ci si limitò a studiare gli esempi che si ritenevano significativi. Per questi, anche se non era possibile fornire le soluzioni in forma chiusa, cioè mediante funzioni elementari, era tuttavia possibile indagare la natura delle soluzioni mediante uno studio diretto dell'equazione differenziale. In tal modo era implicitamente superato il problema dell'«esistenza» delle soluzioni, le quali venivano descritte con grande accuratezza! Nacquero cosí le «funzioni speciali», come le funzioni di Bessel; i polinomi di Legendre, ecc.

Si mostrerà ora, con un esempio molto semplice, come sia possibile descrivere le proprietà delle soluzioni direttamente dall'equazione differenziale. Si consideri l'equazione differenziale del secondo ordine $y''+y=0$. Questa, come si verifica immediatamente, ha le due soluzioni indipendenti $\sin x$, $\cos x$. S'immagini tuttavia di non conoscere queste soluzioni e di volerle dedurre direttamente dall'equazione differenziale. Posti $y'=y_2$ e $y=y_1$, l'equazione è allora equivalente al sistema

$$\begin{cases} y_2'=-y_1 \\ y_1'=y_2. \end{cases}$$

Da questo sistema si ricava immediatamente la proprietà fondamentale delle soluzioni. Si ha infatti:

$$2y_1y_1'+2y_2y_2'=0$$

e quindi:

$$\frac{d}{dx}(y_1^2+y_2^2)=0$$

cioè

$$y_1^2+y_2^2=\text{cost.}$$

Se ora si assumono le condizioni iniziali $y_1(0)=0$ e $y_2(0)=1$, si ha esattamente

$$y_1^2+y_2^2=1,$$

che è la proprietà fondamentale delle due funzioni $y=\sin x$, $y=\cos x$.

È chiaro come in tal modo non si è «dimostrata» l'esistenza di soluzioni dell'equazione differenziale, ma è anche chiaro come quanto si è osservato circa le eventuali soluzioni l'abbia resa completamente plausibile, al punto tale da far diventare il problema intorno alla loro esistenza di natura pedantesca. Cosí, se è data una singola equazione differenziale, operando in questo modo, si può, in un certo senso, aggirare l'ostacolo di un teorema di esistenza. Ma il problema diviene di natura completamente diversa quando il patrimonio di equazioni differenziali si arricchisce al punto tale da considerare equazioni differenziali con un grande grado di arbitrarietà. In questo momento la problematica dei teoremi di esistenza si pone con tutto il suo vigore.

Questo è un buon esempio di come un incremento quantitativo all'interno di una teoria dia luogo ad un incremento qualitativo.

Va notato ancora come, nello stesso periodo e per ragioni sostanzialmente analoghe, si pone la problematica dei teoremi di esistenza anche all'interno dell'algebra. Infatti i teoremi per l'esistenza di radici di un'equazione algebrica della forma

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

si collocano tra la fine del Settecento ed i primi anni dell'Ottocento.

Si presentano ora tre possibili dimostrazioni del teorema di esistenza: un primo metodo di Cauchy, noto anche come metodo dei poligoni; un secondo metodo, pure dovuto sostanzialmente a Cauchy, basato sugli sviluppi in serie; e infine il metodo di Peano-Picard.

Si tratteranno in maniera schematica i primi due metodi, mentre si entrerà in maggiori dettagli per quello di Peano-Picard, che si è certamente affermato come il piú importante ed è quello sviluppato nella maggior parte dei testi moderni sulle equazioni differenziali.

Un primo teorema di esistenza fu dato da Cauchy nei suoi *Exercices d'analyse* per l'equazione differenziale del primo ordine $y'=f(x,y)$. Questo metodo, molto legato alla evidenza geometrica, utilizza sostanzialmente la stessa idea che è contenuta nella definizione dell'integrale come limite di somme. Si supponga di voler calcolare la soluzione dell'equazione differenziale nell'intervallo $(x_0, x_0+\delta)$ (ove δ è definito opportunamente a partire dall'equazione differenziale. Si veda, per esempio come è calcolato quando viene illustrato il metodo di Peano-Picard), supponendo che la soluzione cercata $y(x)$ assuma in x_0 il valore y_0. Se nell'equazione differenziale si pongono i valori x_0, y_0 al posto di x ed y si ha un valore numerico $f(x_0, y_0)$ che è l'inclinazione della retta tangente nel punto (x_0, y_0). Si consideri ora una suddivisione dell'intervallo $(x_0, x_0+\delta)$ mediante certi punti $x_0=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_n=x_0+\delta$. In corrispondenza ai valori a_i è possibile calcolare per ricorrenza $y_{i+1}=y_i+f(a_i, y_i)$, ove, naturalmente, $y_0=y(x_0)$. Si passi ora a considerare la poligonale di vertici $P_i=(a_i, y_i)$ (cfr. fig. 3) e sia $y(x)$ l'equazione che definisce questa poligonale. Si dimostra che se si fa tendere a 0 la massima distanza $a_{i+1}-a_i$ questa poligonale definisce una soluzione dell'equazione differenziale. Le ipotesi che Cauchy poneva per fare questa dimostrazione erano la continuità della $f(x,y)$ e della $f_y(x,y)$. In seguito fu dimostrato da Lipschitz come queste ipotesi fossero eccessive. Egli pose in evidenza l'essenzialità della condizione, chiamata oggi con il suo nome – condizione di Lipschitz – che verrà illustrata qui di seguito.

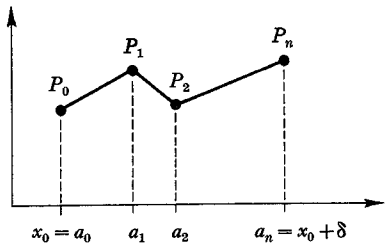


Figura 3.
Metodo dei poligoni per determinare la soluzione di una equazione differenziale.

DEFINIZIONE. *Sia $f(x, y)$ definita nel dominio del piano x, y dato dalle diseguaglianze $|x-x_0| \leq a$ e $|y-y_0| \leq b$. Si dirà che in tale dominio $f(x, y)$ è lipschitziana rispetto a y se esiste una costante A tale che*

$$|f(x_1, y_1)-f(x_1, y_2)| < A|y_1-y_2|.$$

Le ipotesi del teorema possono essere ridotte alla continuità ed alla lipschitzianità, rispetto alla variabile y. L'essenzialità di questa condizione viene bene in luce dimostrando il teorema di esistenza, ad esempio con il metodo di Peano-Picard.

La seconda forma del teorema di esistenza di Cauchy è data supponendo la $f(x, y)$ analitica nell'intorno di un certo punto (x_0, y_0). Naturalmente in quest'ipotesi si cerca una soluzione analitica. La dimostrazione è ancora molto naturale. Se l'equazione ammette una soluzione, questa è della forma

$$y(x) = y_0 + y_0'(x-x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{y_0'''}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

dove $y_0'', y_0''', \dots$ sono determinati dall'equazione differenziale. Si tratterà quindi di mostrare come questa serie definisca effettivamente una funzione, ossia che sia una serie convergente. Si osservi come il metodo di considerare la serie scritta sopra come una soluzione dell'equazione differenziale sia presente fin dalle origini del calcolo differenziale, come metodo di calcolo della soluzione. La grande differenza dell'atteggiamento di Cauchy, dovuto alla esperienza delle serie divergenti, è che ora egli avverte con chiarezza che il punto essenziale è quello di mostrare la convergenza della serie.

La linea della dimostrazione è la seguente. Poiché $f(x, y)$ è analitica nel punto (x_0, y_0), vi sono due cerchi di raggi r_1 ed r_2 in modo che, se x ed y verificano le diseguaglianze $|x-x_0| < r_1$ e $|y-y_0| < r_2$, allora $f(x, y)$ è analitica. In particolare essa è superiormente limitata da una costante M. Ora, si considerino la funzione

$$F(x, y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{r_1}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{r_2}\right)}$$

e il suo sviluppo: $F(x, y) = \sum \frac{M}{r_1^\alpha r_2^\beta}(x-x_0)^\alpha (y-y_0)^\beta$. Si consideri ora la serie-soluzione dell'equazione

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$$

di cui è agevole mostrare la convergenza utilizzando il fatto che $F(x, Y)$ è data in modo esplicito. Si dimostra come questa serie domini termine a termine la serie

$$y_0 + y_0'(x-x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

da cui si conclude la convergenza richiesta.

E ora, il metodo di dimostrazione di Peano-Picard. Per poter trattare la dimostrazione in maniera piú dettagliata, occorre un enunciato rigoroso:

TEOREMA. *Data l'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ con la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, supponiamo che per $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$, la funzione $f(x, y)$ sia continua e verifichi la condizione di Lipschitz $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \leq A|y_1 - y_2|$. Allora esiste un numero δ ($\delta \leq a$, che si determina nel corso della dimostrazione) in modo che in $(x_0, x_0 + \delta)$ il sistema ha una ed una sola soluzione $y(x)$ che verifica la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.*

Gli elementi essenziali della dimostrazione sono i seguenti:

I) si sostituisce all'equazione differenziale l'equazione integrale equivalente

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt;$$

II) si considera la formula ricorrente

$$y_0(x) = y_0$$
$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt;$$

III) si dimostra che $y_n(x)$ converge ad una funzione $Y(x)$;
IV) in corrispondenza $\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))$ converge a $\int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,dt$;
V) allora dall'equazione

$$y_{m+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_m(t))\,dt$$

facendo tendere m a ∞, si ottiene l'equazione

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))\,dt.$$

Si tratterà poi di dimostrare l'unicità della soluzione trovata, il che si compie in maniera abbastanza agevole.

La dimostrazione che è stata accennata del teorema di esistenza ed unicità utilizza un metodo dimostrativo che va molto al di là dell'applicazione specifica fatta: il principio del punto fisso. Nella forma che viene utilizzata per la dimostrazione di questo teorema, esso è dovuto a Banach (1922), mentre l'idea della sua applicazione alle equazioni differenziali per dimostrare teoremi di esistenza è dovuta a Birkhoff e Kellog [1922]. Si vuol qui rianalizzare la dimostrazione alla luce di questo principio, perché esso costituisce una tecnica dimostrativa fondamentale. Si vedrà in seguito come anche altri teoremi, ad esempio quello di Bendixon sui sistemi autonomi, possano ricondursi ad applicazioni del principio del punto fisso.

Sia X uno spazio metrico completo ove d indica la distanza, e sia Ω un chiuso di X. Sia poi $T:\Omega\to\Omega$ una trasformazione di Ω in sé. Un punto x, che sia soluzione dell'equazione $T(x)=x$ viene detto un punto fisso. Si ha ora il seguente:

TEOREMA. *Sia T una contrazione, cioè una applicazione che soddisfa $d(T(x), T(y))\leq a\,d(x,y)$ con $a<1$ (indipendente da x ed y). Allora esiste un unico $\bar{x}$ per il quale $T(\bar{x})=\bar{x}$.*

Dimostrazione: Sia x_0 un punto arbitrario di Ω; si ponga $x_{n+1}=T(x_n)$. Allora, essendo anche $x_n=T(x_{n-1})$ si ha

$$d(x_{n+1}, x_n)\leq a\,d(x_n, x_{n-1})$$

e quindi

$$d(x_{n+1}, x_n)\leq a^n d(x_1, x_0).$$

Di qui è facile dedurre che $\{x_n\}$ è una successione fondamentale. Essendo X completo esiste un $\bar{x}$ tale che $x_n\to\bar{x}$. Si vede poi immediatamente che $T(\bar{x})=\bar{x}$. L'unicità della soluzione segue dal fatto che, ammesso per assurdo che vi sia un'altra soluzione x', deve allora essere

$$d(\bar{x}, x')=d(T(\bar{x}), T(x'))\leq a\,d(\bar{x}, x')$$

il che è assurdo, poiché $a<1$.

Si può applicare ora questo teorema al caso che interessa nel modo seguente. Posto

$$T(y(x))=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt,$$

al posto di X si consideri lo spazio delle funzioni continue definite in $[x_0, x_0+a]$ con la norma

$$\|y(x)\|=\max_{x\in[x_0, x_0+a]}|y(x)|.$$

È ora possibile dimostrare che T risulta essere una contrazione e di qui segue l'esistenza e l'unicità della soluzione.

Come conclusione di questo paragrafo, qualche osservazione.

1) Il metodo esposto, che permette di ricavare una soluzione in un intorno destro di x_0, si estende in modo ovvio ad un intorno sinistro di x_0. Si può quindi immaginare la soluzione definita per $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

2) I metodi or ora illustrati per l'equazione differenziale del primo ordine si estendono senza difficoltà a sistemi di equazioni differenziali del primo ordine, e quindi ad un sistema di equazioni differenziali di ordine qualsiasi, poiché vi è equivalenza fra un'equazione differenziale di ordine superiore al primo e un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Infatti data l'equazione

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

basta porre $y=y_1, y'=y_2, \ldots, y^{(n-1)}=y_n$, e si ha il sistema

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}'=y_n \\ y_n'=f(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases}$$

3) I teoremi di esistenza visti sopra, in particolare quello di Peano-Picard, garantiscono l'esistenza di una soluzione *localmente*. In altre parole la soluzione è determinata in un intorno del punto x_0: $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Naturalmente se nel punto $x_0+\delta$ non cadono le ipotesi del teorema di esistenza, la soluzione può essere prolungata a $x_0+\delta+\delta_1$ e cosí via. Tuttavia, anche se le ipotesi del teorema di esistenza continuano a valere, può succedere che la successione $x_0+\delta, x_0+\delta+\delta_1, x_0+\delta+\delta_1+\delta_2, \ldots$ abbia limite finito, cioè che la soluzione non sia ulteriormente prolungabile. Si ha infatti l'esempio ben noto (cfr. Tricomi [1961]) dell'equazione differenziale che definisce le iperboli del tipo

$$y=\frac{1}{x+c}.$$

Se si considera l'integrale passante per il punto (x_0, y_0), ossia

$$y=\frac{1}{x-x_0+\dfrac{1}{y_0}},$$

questo non è prolungabile oltre il punto $x_0-(1/y_0)$. Tuttavia l'equazione differenziale che corrisponde a questa famiglia di iperboli è $y'+y^2=0$ che non presenta in questo punto alcuna singolarità.

4) La soluzione di un'equazione differenziale ordinaria dipende con continuità dai dati. Si ha in effetti il teorema seguente:

TEOREMA. *Sia $y'=f(x,y)$ un'equazione differenziale che ha per soluzione in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ una curva $y(x)$ tale che $y(x_0)=y_0$. Se $\bar{y}(x)$ è una soluzione $\bar{y}(x_0)=y_0+\sigma$, allora per $|x-x_0|<\delta$ si ha*

$$|\bar{y}(x)-y(x)|\leq\sigma\cdot e^{A\delta},$$

ove la costante A è quella che corrisponde alla condizione di Lipschitz per la funzione $f(x,y)$.

1.4. Teoria di Sturm e Liouville.

Una tecnica importante per la risoluzione delle equazioni alle derivate parziali, come si vedrà ad esempio nel caso dell'equazione delle onde, consiste nel metodo della separazione delle variabili. Questo metodo riconduce la risoluzione dell'equazione originaria alla risoluzione di un certo numero di equazioni differenziali ordinarie. Poiché in generale i problemi che conducono ad equazioni alle derivate parziali hanno assegnate condizioni al contorno, si ottengono analogamente, per le equazioni differenziali ordinarie che si ricavano, delle condizioni al contorno. Ad esempio, per un'equazione del secondo ordine del tipo $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ si ricerca una soluzione per la quale sia $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$. Una tipica richiesta di questo tipo compare per l'equazione della corda vibrante, ove le condizioni precedenti significano che s'immaginano fissati due punti della corda.

In generale la tecnica della separazione delle variabili comporta l'introduzione di un parametro e le equazioni differenziali che si ottengono hanno soluzioni solamente per certi valori particolari del parametro (autovalori). Le soluzioni corrispondenti (autofunzioni) possiedono importanti proprietà di ortogonalità che verranno analizzate successivamente. Per illustrare e motivare il tipo di analisi al quale si perviene, verrà utilizzato appunto l'esempio importante della corda vibrante.

L'analisi del suo movimento fu motivata storicamente dalla necessità di capire la natura dei suoni musicali. D'Alembert, al quale si deve un metodo brillantissimo per la risoluzione dell'equazione della corda vibrante – sostanzialmente il capostipite della tecnica della separazione delle variabili –, era in contatto molto stretto con Rameau e con le sue idee. Egli infatti è autore degli *Eléments de musique théorique et pratique suivant les principes de M. Rameau*, il che testimonia appunto la sua attenzione ai problemi musicali; ma in generale si può dire che l'interesse per questa problematica è condiviso da tutti gli enciclopedisti. Basti pensare ai *Principes généraux d'acoustique* di Diderot, o alla *Lettre sur la musique française* di Rousseau.

S'immagini, dunque, la corda vibrante come una corda di violino, ad esempio quella accordata sul sol. Se essa viene strofinata con un archetto, si ode naturalmente la nota sol, ma essa è accompagnata anche da altri suoni, di altezza sempre maggiore e di decrescente intensità. Sono udibili distintamente l'ottava del suono fondamentale, cioè ancora un sol; la dominante, cioè

la quinta successiva; il re, la terza; il si, ... e cosí via. Se si assume come definizione di suono musicale il prodotto di vibrazioni periodiche e regolari, si può esprimere matematicamente questo fatto con: «Ogni data forma regolare, periodica, di vibrazione (ogni suono) può sempre prodursi come somma di vibrazioni semplici, aventi periodi che sono uguale a quello dato, doppio, triplo, ... e cosí via». Questo fatto, che ogni suono sia scomponibile come somma di altri suoni, spiega la natura, «il timbro» del singolo suono. La «purezza», la «semplicità» che associamo al suono del flauto, corrispondono alla relativa assenza di suoni concomitanti con quello fondamentale; come si dice, all'assenza di «armonici». La diversa qualità sonora del violino va invece ascritta alla ricchezza di armonici che accompagnano le sue note. Si vedrà piú avanti come la teoria di Sturm e Liouville fornisca un supporto matematico ai risultati dati in modo qualitativo.

In questo paragrafo ci si riferirà ad un'equazione del secondo ordine della forma

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0. \tag{1}$$

Occorre dunque premettere qualche risultato sulle soluzioni di questa equazione.

DEFINIZIONE. *Due soluzioni $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ dell'equazione (1) sono dette dipendenti se una di esse è ottenibile dall'altra moltiplicandola per una costante. Sono dette indipendenti in caso contrario.*

TEOREMA. *Se $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ sono soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ nell'intervallo $[a,b]$, allora ogni altra soluzione è della forma $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$.*

Dimostrazione: È chiaro come $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ sia una soluzione della equazione differenziale. Occorre quindi solamente dimostrare come ogni soluzione sia di questa forma. Sia dunque $y(x)$ una soluzione. Per dimostrare che esistono due costanti c_1 e c_2 per le quali $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ basta che per qualche punto x_0 di $[a,b]$ si abbia

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)&=y(x_0)\\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)&=y'(x_0)\end{aligned}$$

perché in tal caso $y(x)$ e $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ sono due soluzioni con lo stesso valore iniziale e lo stesso valore per la derivata prima. Affinché il sistema sia risolubile, occorre allora che

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{vmatrix}=y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_2(x_0)y_1'(x_0)$$

sia diverso da zero. Si consideri ora la funzione di x, $W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'$ che viene detta il wronskiano di y_1, y_2 (dal nome del matematico polacco Wroński). Poiché

$$W'=y_1y_2''+y_1'y_2'-y_2y_1''-y_2'y_1'=y_1y_2''-y_2y_1'',$$

tenendo conto del fatto che y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione differenziale, cioè

$$y_1''+Py_1'+Qy_1=0$$
$$y_2''+Py_2'+Qy_2=0$$

moltiplicando la prima equazione per y_2 e la seconda per y_1, si ha

$$y_2y_1''+Py_2y_1'+Qy_2y_1=0$$
$$y_1y_2''+Py_1y_2'+Qy_1y_2=0$$

da cui sottraendo:

$$(y_1y_2''-y_2y_1'')+P(y_1y_2'-y_2y_1')=0$$

ossia

$$\frac{dW(y_1,y_2)}{dx}+PW(y_1,y_2)=0$$

e quindi

$$W=ce^{-\int P\,dx}$$

e se ne conclude che $W(y_1,y_2)$ o è identicamente zero in $[a,b]$ oppure non si annulla mai. Si osserva facilmente che se y_1 e y_2 sono soluzioni indipendenti, il loro wronskiano non può essere identicamente zero, e si conclude cosí che è possibile determinare c_1 e c_2.

Si torni ora a considerare l'equazione differenziale $y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y=0$. Si è già osservato come questa equazione non sia, in generale, risolvibile in termini di funzioni elementari. Tuttavia è stato mostrato, con un esempio, quello dell'equazione $y''+y=0$, come sia possibile ricavare importanti informazioni sulle soluzioni direttamente dall'equazione differenziale. L'equazione $y''+y=0$ è esplicativa anche di un altro fenomeno che si riferisce alle soluzioni dell'equazione differenziale generale. Sappiamo che le due soluzioni $\sin x$, $\cos x$ hanno una disposizione particolare dei loro zeri: precisamente, tra due zeri successivi di una funzione cade uno zero dell'altra. Questo risultato è di natura generale. Si ha infatti il seguente teorema, detto di separazione:

TEOREMA (Sturm). *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni indipendenti dell'equazione $y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y=0$, allora gli zeri di queste funzioni sono distinti e si succedono alternatamente.*

Dimostrazione: Poiché y_1 e y_2 sono soluzioni indipendenti, il loro wronskiano non si annulla e, poiché è continuo, avrà segno costante, per esempio positivo. È chiaro come y_1 e y_2 non possano avere uno zero in comune, altrimenti, indicato con α questo zero, si avrebbe $y_1(\alpha)\,y_2'(\alpha)-y_2(\alpha)\,y_1'(\alpha)\equiv 0$. Siano ora α e β due zeri di y_1; si ha in corrispondenza

$$y_1(\alpha)\,y_2'(\alpha)-y_2(\alpha)\,y_1'(\alpha)=-y_2(\alpha)\,y_1'(\alpha)\neq 0$$

ed anche:

$$y_1(\beta)\,y_2'(\beta)-y_2(\beta)\,y_1'(\beta)=-y_2(\beta)\,y_1'(\beta)\neq 0.$$

Allora in α sia y_2 che y_1' sono diversi da zero; e similmente in β sia y_2 che y_1' sono diversi da zero. Inoltre y_1' deve avere segni opposti in α ed in β, poiché, se è crescente nel primo caso, deve essere decrescente nel secondo e viceversa. Ma allora anche y_2 deve avere segno opposto in α ed in β. Poiché y_2 è continua deve annullarsi in un punto tra α e β. La funzione y_2 non può annullarsi piú di una volta tra α e β, altrimenti, scambiando i ruoli di y_1 e di y_2, si avrebbe che α e β non sarebbero zeri consecutivi.

L'equazione differenziale $y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y=0$, può porsi nella forma $u''+q(x)u=0$ che sarà utile per enunciare un altro importante teorema. Basta porre $y=uv$ e sostituire nell'equazione. Si ha allora

$$(uv''+2u'v'+u''v)+P(uv'+u'v)+Quv=0$$

e allora

$$u''v+(2v'+Pv)u'+(v''+Pv'+Qv)\,u=0.$$

Ponendo $2v'+Pv=0$ e ricavando una soluzione

$$v=e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx},$$

l'equazione si riduce alla forma richiesta.

È ora possibile enunciare il

TEOREMA. *Data l'equazione $u''+q(x)\,u=0$, se $q(x)<0$ ed $u(x)$ è una soluzione non banale, allora $u(x)$ ha al piú uno zero.*

La dimostrazione di questo teorema si può effettuare con metodi elementari come il teorema precedente. Molto importante è anche il seguente

TEOREMA. *Sia $y(x)$ una soluzione non banale dell'equazione $y''+q(x)\,y=0$, ove $q(x)$ è una funzione positiva. In un intervallo chiuso $[a,b]$, $y(x)$ può avere solamente un numero finito di zeri.*

Dimostrazione: Si supponga per assurdo che ci siano infiniti zeri in $[a,b]$. Esiste dunque, per la compattezza di questo intervallo, una successione di zeri $x_n\to x_0$. Poiché $y(x)$ è continua si ha

$$y(x_0)=\lim_{x_n\to x_0} y(x_n)=0$$

ed anche

$$y'(x_0)=\lim_{x_n\to x_0}\frac{y(x_n)-y(x_0)}{x_n-x_0}=0.$$

Da questo risultato segue che $y(x)$ è la soluzione nulla, contro quanto supposto.

Un altro teorema molto importante, sempre dovuto a Sturm, è il cosiddetto teorema del confronto. Ancora una volta l'idea direttrice si fonda sulla considerazione di un fatto elementare. Se si considerano le due equazioni

$$y''+y=0$$
$$y''+n^2y=0$$

le soluzioni della seconda equazione $y=\sin nx$, $y=\cos nx$ oscillano piú rapidamente, se $n>1$, naturalmente, di quelle della prima. Questo risultato è ancora una volta paradigmatico del comportamento dell'equazione generale.

TEOREMA. *Siano date le due equazioni differenziali*

$$y''+q(x)y=0$$
$$z''+r(x)z=0$$

ove $r(x)$ e $q(x)$ sono funzioni positive tali che $q(x)>r(x)$. Allora se $y(x)$ e $z(x)$ sono soluzioni non banali delle due equazioni, $y(x)$ si annulla almeno una volta tra due zeri successivi di $z(x)$.

A conclusione di questo paragrafo, vengono ora enunciati alcuni fra i principali risultati della teoria di Sturm-Liouville per l'equazione contenente il parametro λ

$$y''+P(x)\,y'+\lambda\,Q(x)\,y=0.$$

Questa equazione, moltiplicando per un conveniente fattore, può ricondursi alla forma

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda\,q(x)\,y=0.$$

Moltiplicando infatti per $M(x)$ si ottiene

$$My''+MPy'+\lambda MQy=0.$$

Supponendo che $dM/dx=MP$, cioè $M=e^{\int P\,dx}$ l'equazione si riduce alla forma richiesta. Le condizioni al contorno dell'equazione possono ora supporsi del tipo:

$$y'(a)+\alpha\,y(a)=0 \qquad \alpha\geq 0,\ \beta\geq 0,\ a<b$$
$$y'(b)+\beta\,y(b)=0.$$

I risultati fondamentali ottenuti da Sturm e Liouville possono ora riassumersi in

I) Il problema ha una soluzione non banale solamente se il parametro λ ha un valore scelto in una successione $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots<\lambda_n$ che diverge a $+\infty$. La soluzione corrispondente a $\lambda=\lambda_n$ è unica a meno di un fattore moltiplicativo. Se come condizioni al contorno invece delle (1) si assume $y(a)=y(b)=0$, allora la soluzione che corrisponde a λ_n ha esattamente $n-1$ zeri nell'intervallo aperto (a, b).

II) Se le soluzioni corrispondenti a λ_n vengono indicate con y_n, allora si ha la proprietà di ortogonalità

$$\int_a^b q(x)y_m y_n\,dx=0 \qquad \text{se } m\neq n.$$

Si aggiunga a conclusione del paragrafo che cosí come le funzioni $\sin x$, $\sin 2x$, ..., $\sin nx$, cioè le autofunzioni dell'equazione differenziale $y''+\lambda y=0$, possono essere usate per lo sviluppo in serie di Fourier, allo stesso modo si può pensare di sviluppare una funzione $f(x)$ che soddisfi alle condizioni iniziali dell'equazione differenziale, mediante le autofunzioni soluzioni dell'equazione differenziale, cioè: $f(x)=a_1\,y_1(x)+a_2\,y_2(x)+\ldots+a_n\,y_n(x)+\ldots$ Se si moltiplica per $q(x)\,y_n$ e si integra termine a termine (formalmente), si ha che il coefficiente n-esimo è dato da

$$a_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_a^b q(x)\,y_n(x)\,f(x)\,dx \qquad \text{con } \alpha_n=\int_a^b q(x)\,y_n^2(x)\,dx.$$

Lo sviluppo che abbiamo cosí determinato, detto sviluppo di Sturm-Liouville, è valido per classi molto vaste di funzioni, ma un'analisi dettagliata delle condizioni di validità va al di là dello scopo della nostra esposizione.

1.5. Equazioni differenziali nel campo complesso. Teoria delle singolarità.

In tutto il secolo XIX si osserva una tendenza generale all'introduzione della variabile complessa in vari settori della matematica.

In geometria, la necessità di una buona sistemazione della teoria dell'intersezione spinge a considerare punti a coordinate complesse. Anche nel campo dell'analisi si evidenziano importanti proprietà difficilmente spiegabili senza ricorrere alla variabile complessa.

In effetti la possibilità di rappresentare una funzione mediante sviluppi in serie è legata alla collocazione dei punti singolari, e una funzione «reale» può avere punti singolari nel piano complesso.

Nel campo delle equazioni differenziali vi sono poi molti motivi specifici che spingono ad interpretare le variabili come numeri complessi.

Si osserva intanto che nel vasto patrimonio di equazioni differenziali del secolo XIX solamente pochi tipi di equazioni differenziali possono essere risolti a partire dalle funzioni elementari con un numero finito di passaggi. Una delle tecniche fondamentali, presente fin dall'inizio del calcolo differenziale, è quella di ricercare la soluzione mediante serie di funzioni, ed i problemi di convergenza si trattano con maggiore facilità nel campo complesso.

Inoltre, molte importanti equazioni differenziali come quelle di Bessel e Legendre e l'equazione ipergeometrica, contengono delle singolarità che sono importanti caratteristiche dell'equazione differenziale; ancora, le serie-soluzione nell'intorno dei punti singolari si trattano piú agevolmente nel campo complesso.

Due nomi sono soprattutto legati allo sviluppo in questo senso della teoria delle equazioni differenziali: Fuchs e Riemann. Nelle pagine seguenti di questo paragrafo si accennerà ad alcune delle loro idee e dei loro risultati.

Va notato, anzitutto, che lo studio si limitò, almeno all'inizio, alle equazioni differenziali lineari, cioè della forma

$$w^{(n)}+p_1(z)\,w^{(n-1)}+\ldots+p_n(z)\,w=0.$$

Questo sostanzialmente per due motivi, perché la maggior parte delle equazioni differenziali che interessano, come appunto quelle citate, rientrano in questa forma e poi perché l'equazione differenziale lineare ha la caratteristica importante che i suoi integrali hanno singolarità solamente ove i coefficienti presentano singolarità. Come corollario di questo fatto si ha che l'equazione differenziale lineare non può avere singolarità variabili. Si è già visto l'esempio semplicissimo dell'equazione $y'+y^2=0$ la quale tuttavia ha delle soluzioni che possiedono delle singolarità variabili. Per le equazioni differenziali lineari si ha invece:

TEOREMA. *Se i coefficienti $p_1(z), p_2(z), \ldots, p_n(z)$ sono regolari per $|z-a|<R$, allora esiste un'unica soluzione $w(z)$ regolare per $|z-a|<R$.*

La dimostrazione di questo teorema si ottiene semplicemente particolarizzando a questo caso la dimostrazione generale del teorema di esistenza ed unicità visto in precedenza. Va osservato tuttavia il fatto molto importante che la soluzione definita per $z=a$ può essere estesa in un cerchio che ha per raggio R la minima distanza dai punti singolari. Ne segue, con il principio del prolungamento analitico, che la soluzione può essere estesa in ogni regione che non contenga punti singolari.

E ora, brevemente, l'approccio di Riemann. Se $z=a$ è un punto regolare, allora in un intorno di a è possibile esprimere la soluzione generale nella forma

$$w=c_1w_1+c_2w_2+\ldots+c_nw_n$$

ove $w_1, \ldots, w_n$ sono n soluzioni fondamentali. Se ora si considera una curva chiusa che inizi e termini in a e che non contenga punti singolari, si possono prolungare le soluzioni lungo questa curva partendo e ritornando in a. Se w_i è una soluzione, poiché procedendo lungo la curva w_i mantiene questo carattere, al ritorno in a si avrà che la soluzione trasformata w_i' è data da

$$w_i'=a_1w_1+a_2w_2+\ldots+a_nw_n.$$

In generale si avrà quindi un nuovo sistema di soluzioni

$$\begin{aligned} w_1' &= a_{11}w_1+a_{12}w_2+\ldots+a_{1n}w_n \\ w_2' &= a_{21}w_1+a_{22}w_2+\ldots+a_{2n}w_n \\ &\vdots \\ w_n' &= a_{n1}w_1+a_{n2}w_2+\ldots+a_{nn}w_n \end{aligned}$$

ove dev'essere

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \neq 0$$

altrimenti le soluzioni di partenza non sarebbero indipendenti. In altre parole, il sistema di soluzioni $w_1, \ldots, w_n$ è sottoposto a una trasformazione lineare quando si considera una curva chiusa che non contiene punti singolari. Si osserva come queste trasformazioni lineari costituiscono un gruppo, che viene detto gruppo di monodromia dell'equazione differenziale.

L'idea di Riemann si esprime dicendo che le proprietà delle funzioni definite dall'equazione differenziale sono espresse dal gruppo di monodromia piuttosto che dall'equazione differenziale stessa.

Riemann mostrò come, assegnate n funzioni, uniformi, finite e continue, salvo che in punti eccezionali, e assegnato un gruppo di trasformazioni su di esse come illustrato piú sopra, fosse possibile costruire un'equazione differenziale avente per soluzioni le funzioni assegnate. Questo argomento, trattato da Riemann in forma particolare, diede luogo al «problema di Riemann», che fu risolto in maniera completamente soddisfacente da Hilbert (1905).

Contrariamente a Riemann, Fuchs considerò invece direttamente l'equazione differenziale, con l'obiettivo di ottenere nell'intorno dei punti singolari sviluppi in serie che ponessero in luce la natura di questi. Si consideri, per semplicità, il caso di un'equazione del secondo ordine $w''+p(z)\,w'+q(z)\,w=0$ (ancora si può osservare come questo caso contenga molti esempi interessanti: la equazione di Bessel, la equazione di Legendre e quella ipergeometrica). Si supponga che il punto singolare in esame sia posto nell'origine e che esista un cerchio S che non contiene altri punti singolari. Come è stato osservato, se si considerano un punto $z=a$ in S e una curva chiusa che non contenga l'origine che inizia e termina in a, le due soluzioni fondamentali sono sottoposte ad una trasformazione

$$\begin{aligned} w_1'(z) &= a_{11}\,w_1(z)+a_{12}\,w_2(z) \\ w_2'(z) &= a_{21}\,w_1(z)+a_{22}\,w_2(z). \end{aligned}$$

Ci si può ora porre il problema se sia possibile determinare una soluzione che risulti inalterata quando si considera una curva come sopra, ma si vede facilmente come in generale questo non sia possibile; ed allora si può chiedere la condizione meno restrittiva che una soluzione sia alterata semplicemente per un fattore moltiplicativo. Questo, considerando una soluzione della forma $\lambda\,w_1(z)+\mu\,w_2(z)$ conduce alla richiesta

$$\lambda(a_{11}w_1(z)+a_{12}w_2(z))+\mu(a_{21}w_1(z)+a_{22}w_2(z))=k[\lambda w_1(z)+\mu w_2(z)]$$

cioè al sistema

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\lambda+a_{21}\mu=0 \\ a_{12}\lambda+(a_{22}-k)\mu=0 \end{cases}$$

che è risolubile se e solo se

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-k \end{vmatrix}=0.$$

Si supponga che l'equazione di secondo grado che si deduce uguagliando a zero questo determinante abbia due radici distinte k_1, k_2. Scelto un nuovo sistema fondamentale di soluzioni in $z=a$, $w_1(z)$ sia la soluzione che viene moltiplicata per k_1, $w_2(z)$ quella che risulta moltiplicata per k_2.

Si osservi ora che la funzione $z^{-\rho}$ risulta anch'essa moltiplicata per un fattore costante, esattamente $e^{-2\pi i\rho}$ quando si considera una curva che circonda l'origine. Si può tener conto di questo fatto per far sí che la funzione $w_1(z)\cdot z^{-\rho}$ risulti inalterata quando si considera una curva chiusa che circonda l'origine. Dovrà essere quindi: $k_1\cdot e^{-2\pi i\rho}=1$ e cioè

$$\rho=\frac{1}{2\pi i}\log k_1.$$

Se dunque si considerano $\rho_1=(1/2\pi i)\log k_1$ e $\rho_2=(1/2\pi i)\log k_2$, si ha che le due funzioni $w_1(z)\,z^{-\rho_1}$ e $w_2(z)\,z^{-\rho_2}$ sono monodrome in S. Esse ammettono dunque uno sviluppo in serie di Laurent, cioè

$$w_1(z)=z^{\rho_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n z^n$$

$$w_2(z)=z^{\rho_2}\sum_{-\infty}^{+\infty}b_n z^n.$$

Nel caso invece in cui le due radici k_1 e k_2 siano uguali si ricavano le soluzioni:

$$w_1(z)=z^{\rho_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n z^n$$

$$w_2(z)=z^{\rho_2}\sum_{-\infty}^{+\infty}b_n z^n+k\,w_1(z)\cdot\log(z).$$

Questi risultati dicono che nel caso di un punto singolare di un'equazione lineare del secondo ordine è possibile descrivere esattamente la natura dell'eventuale polidromia delle soluzioni: essa proviene o da un fattore del tipo z^ρ oppure da $\log z$.

Ci si ponga ora il problema di determinare gli sviluppi in serie che dànno origine alle soluzioni fondamentali. L'idea che si presenta naturale – e che appartiene a tutta la tradizione del calcolo differenziale – è quella di sostituire nell'equazione differenziale e di ricavare in tal modo i coefficienti a_n, b_n. È chiaro come le equazioni risultanti contengano infinite incognite. Quello che è importante è che esse sono trattabili solamente nel caso che lo sviluppo in serie di Laurent contenga un numero finito di termini negativi. Questo pone una differenza molto importante per la forma delle soluzioni e spinge a dare la seguente

DEFINIZIONE. *Una singolarità isolata $z=a$ di un'equazione differenziale è detta regolare se esiste una costante k tale che*

$$\lim_{z\to a} w(z)\,(z-a)^k=0.$$

Una caratterizzazione importante delle singolarità regolari che fa riferimento solo ai coefficienti $p(z)$ e $q(z)$ è fornita dal seguente teorema di Fuchs:

TEOREMA (Fuchs). *Una condizione necessaria e sufficiente affinché $z=0$ sia una singolarità regolare dell'equazione $w''+p(z)\,w'+q(z)\,w=0$ è che $z\,p(z)$ e $z^2\,q(z)$ siano regolari in $z=0$.*

1.6. Equazioni differenziali non-lineari: teoria qualitativa.

Per illustrare alcuni sviluppi della teoria abbondantemente motivata da quanto detto nella introduzione ci si riferirà al caso semplice di due equazioni

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y)\qquad \frac{dy}{dt}=Q(x,y),$$

ove P e Q sono supposte continue e differenziabili con continuità in una certa regione S del piano (x,y). Con queste ipotesi si ha che per ogni punto (x_0,y_0) e per ogni t_0 con $-\infty<t_0<+\infty$ esiste esattamente una soluzione $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ con $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$ la quale è definita per tutti i valori t in un certo intervallo (τ, T). Un risultato molto semplice e molto importante è fornito dalla proposizione seguente:

PROPOSIZIONE. Se $\bar{S}\subseteq S$ è una regione chiusa e limitata contenuta in S e se $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ è una soluzione definita in (τ, T) tale che il punto $(\varphi(t), \psi(t))$ è in $\bar{S}$ per tutti i $t\in(\tau, T)$, allora $\tau=-\infty$ e $T=+\infty$.

Si prendano ora in esame alcune proprietà importanti delle soluzioni del sistema:

1) Se $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ è una soluzione del sistema definita in (τ, T) allora $x=\varphi(t+C)$, $y=\psi(t+C)$ è ancora una soluzione in $(\tau-C, T-C)$. Infatti, ovviamente,

$$\frac{d(\varphi(t+C))}{d(t+C)}=P(\varphi(t+C),\psi(t+C))$$

$$\frac{d(\psi(t+C))}{d(t+C)}=Q(\varphi(t+C),\psi(t+C)).$$

Ma

$$\frac{d\varphi(t+C)}{d(t+C)}=\frac{d\varphi(t+C)}{dt}$$

$$\frac{d\psi(t+C)}{d(t+C)}=\frac{d\psi(t+C)}{dt}$$

e quindi $x=\varphi(t+C)$, $y=\psi(t+C)$ è una soluzione.

II) Due soluzioni $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ e $x=\varphi(t+C)$, $y=\psi(t+C)$ possono essere viste come soluzioni con condizioni iniziali gli stessi valori x_0, y_0 e un diverso t_0.

III) Viceversa due soluzioni $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ con gli stessi valori iniziali x_0, y_0 ed un diverso t_0, possono essere ottenute l'una dall'altra sostituendo $t+C$ a t.

Da queste osservazioni segue facilmente che, se si associa ad una soluzione $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ la sua «traiettoria», cioè il grafico nel piano (x, y) della curva definita dalle equazioni parametriche $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, si ha:

IV) Due soluzioni che differiscono solamente per la scelta del valore iniziale t_0, definiscono la stessa traiettoria.

V) Per ogni punto della regione S vi è esattamente una traiettoria del sistema.

L'interpretazione geometrica della quale ci si è serviti per illustrare i punti IV) e V) è molto importante. Le soluzioni del sistema si interpretano come curve sopra un certo piano (x, y), che viene detto piano delle fasi. Queste curve sono descritte al variare del tempo t. Se $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ è una certa soluzione, si ha

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=P(\varphi(t), \psi(t)) \qquad \frac{d\psi(t)}{dt}=Q(\varphi(t), \psi(t))$$

e dunque P e Q descrivono la velocità delle traiettorie. È naturale allora chiamare un punto (a, b) ove sia $P(a, b)=Q(a, b)=0$ un punto di equilibrio. Se pensiamo di ricavare dal nostro sistema l'equazione differenziale ad esso equivalente

$$\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Si giustifica dunque per un tale punto (a, b) anche la denominazione di punto singolare.

È naturale che lo studio dei punti singolari abbia molta importanza per indagare il comportamento delle traiettorie del sistema. Questo studio si effettua con relativa facilità se nell'intorno di un punto singolare (x_0, y_0) il sistema può porsi nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=A(x-x_0)+B(y-y_0)+\rho(x-x_0, y-y_0) \\[2ex] \dfrac{dx}{dt}=C(x-x_0)+D(y-y_0)+\sigma(x-x_0, y-y_0) \end{cases}$$

ove ρ e σ sono infinitesimi di ordine superiore a $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. In tal caso infatti è possibile dimostrare che il comportamento delle traiettorie nel-

l'intorno del punto singolare è il medesimo comportamento che presenterebbe il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=A(x-x_0)+B(y-y_0) \\[2ex] \dfrac{dx}{dt}=C(x-x_0)+D(y-y_0) \end{cases}$$

e dunque è possibile ridursi allo studio di questo sistema semplificato. Se si suppone, per comodità, che il punto singolare sia nell'origine, si ottiene infine il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=Ax+By \\[2ex] \dfrac{dx}{dt}=Cx+Dy. \end{cases}$$

Questo sistema, con una trasformazione lineare non singolare, può essere ridotto a uno dei tipi

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=ky \\[2ex] \dfrac{dx}{dt}=x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=x+y \\[2ex] \dfrac{dx}{dt}=x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=x+ky \\[2ex] \dfrac{dx}{dt}=kx-y. \end{cases}$$

Si consideri ad esempio il primo sistema. Ad esso si associa l'equazione

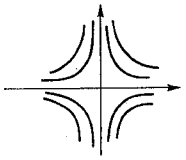
$$\frac{dy}{dx}=k\frac{y}{x}$$

la quale ha integrale generale dato da $\log|y|=k\log|x|+\text{cost}$, ossia

$$y=c|x|^k.$$

Avendo ora l'equazione esplicita delle traiettorie, si può studiare, in corrispondenza ai vari valori di k, il tipo di singolarità. Per $k>0$ tutte le traiettorie

passano per o, e la singolarità viene detta un nodo. Se invece $k<0$, si ha $\lim_{x\to 0} y=\infty$ e quindi una situazione del tipo



Questa singolarità prende il nome di colle. In modo analogo si analizzano le altre singolarità.

Come è stato osservato, l'esistenza, o la non-esistenza, di punti singolari ha grande importanza per determinare l'andamento delle traiettorie. Si capisce quindi come sia molto significativo il seguente

TEOREMA (Bendixon). *Sia C una traiettoria del sistema corrispondente ad una soluzione periodica (un ciclo). Allora nella regione limitata da C vi è almeno un punto singolare.*

Si accenna la dimostrazione di questo teorema, senza entrare in troppi dettagli, poiché è interessante osservare come anch'essa, come il teorema di esistenza ed unicità, si possa far discendere da un teorema del punto fisso. Occorre esattamente il seguente teorema:

TEOREMA (Brouwer). *Una trasformazione continua $f: D\to D$, ove D è un dominio omeomorfo ad un disco, ha almeno un punto fisso.*

Ora, tornando alla dimostrazione del teorema di Bendixon, si osservi che una traiettoria che abbia come punto iniziale (x_0, y_0) contenuto in C è a sua volta totalmente contenuta in C, per la proprietà v), e dunque è definita per ogni valore di t. Di conseguenza, fissato (x_0, y_0) vi è una traiettoria con $\varphi(0)=x_0$, $\psi(0)=y_0$. Ora, fissato un valore t, si può considerare il punto $(\varphi(t), \psi(t))$ sulla traiettoria per (x_0, y_0). Tenendo fisso t e lasciando variare (x_0, y_0), si ottiene un'applicazione della regione interna a C (che occupa il ruolo di D del teorema citato) in se stessa. Ora, per il teorema citato, quest'applicazione avrà un punto fisso, in altre parole un punto (x_t, y_t) tale che la traiettoria che «parte da esso» ritorna dopo il tempo t. Se ora si fa tendere t a o, si ottengono traiettorie percorse in tempi sempre piú brevi. Sia $t_1, t_2, \ldots$ una successione di valori di t che tende a zero, e siano $(x_{t_1}, y_{t_1}), (x_{t_2}, y_{t_2}), \ldots$ i corrispondenti punti fissi. Da questa successione si può estrarre una successione convergente ad (x^*, y^*). È ora del tutto intuitivo, ed è agevole dimostrarlo, come (x^*, y^*) sia il punto singolare richiesto.

Questo teorema può anche essere interpretato come un test per l'esistenza o meno di traiettorie chiuse. In effetti se in una data regione non vi sono punti singolari, in questa non possono esservi traiettorie chiuse, altrimenti si contraddirebbe al teorema dimostrato.

Un altro risultato in questo senso è dato dal

TEOREMA (test di Dulac per le regioni semplicemente connesse). *Si consideri il sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=P(x,y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y) \end{cases}$$

e supponiamo che sia definito in una regione G semplicemente connessa. Sia $B(x,y)$ una funzione continua definita in G per la quale la quantità

$$\frac{\partial}{\partial x}(B(x,y)\,P(x,y))+\frac{\partial}{\partial y}(B(x,y)\,Q(x,y))$$

non cambia segno. Allora non vi sono curve chiuse semplici che si possano ottenere come unione di traiettorie del sistema.

Dimostrazione: Per assurdo sia Γ una tale curva. Allora l'integrale $\int_\Gamma(-BQ\,dx+BP\,dy)$ è nullo, poiché se $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ sono le equazioni di Γ, con $0\le t\le T$ si verifica, con una sostituzione diretta, come sia nullo l'integrando. D'altro canto, applicando la formula di Green, si ha

$$0=\int_\Gamma(-BQ\,dx+BP\,dy)=\iint_\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x}BP+\frac{\partial}{\partial y}BQ\right)dx\,dy,$$

ove Ω è la regione limitata da Γ. Poiché la quantità

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)$$

deve avere segno costante, si ha una contraddizione.

In particolare, dal teorema precedente, ponendo $B(x,y)=1$, si ha il «test di Bendixon». Se $(\partial P/\partial x)+(\partial Q/\partial y)$ è di segno costante, non vi sono traiettorie chiuse.

Come si è già avuto occasione di osservare, un altro problema importante nel campo delle equazioni differenziali non-lineari è quello della stabilità delle soluzioni.

Si tratta qui di decidere, esprimendosi in termini intuitivi, se una traiettoria, nello scorrere del tempo, manterrà le stesse caratteristiche o cambierà in maniera sostanziale; esprimendosi in termini astronomici, ad esempio, se un satellite continuerà a ruotare attorno ad un pianeta o si allontanerà indefinitamente.

Naturalmente vi sono molte altre possibilità di comportamento per una soluzione che corrispondono a molteplici definizioni di stabilità: stabilità senz'altro, stabilità asintotica, stabilità uniforme, ecc. Si preciseranno in termini matematici solamente le due definizioni di stabilità e di stabilità asintotica.

DEFINIZIONE. *Una soluzione* $(x(t), y(t))$ *del sistema di equazioni differenziali (che supponiamo in forma generale, poiché per questa definizione non interviene il fatto che sia autonomo)*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x, y, t) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(x, y, t) \end{cases}$$

definita in $(t_0, +\infty)$ *è detta stabile se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che ogni soluzione* $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ *che, definita per* $t = t_0$, *soddisfa alla diseguaglianza*

$$\sqrt{(\tilde{x}(t_0) - x(t_0))^2 + (\tilde{y}(t_0) - y(t_0))^2} < \delta$$

è definita per $t \geq t_0$ *e soddisfa ulteriormente per ogni* $t \geq t_0$ *la diseguaglianza*

$$\sqrt{(\tilde{x}(t) - x(t))^2 + (\tilde{y}(t) - y(t))^2} < \varepsilon.$$

La definizione di stabilità asintotica è invece la seguente:

DEFINIZIONE. *La soluzione* $(x(t), y(t))$ *è detta asintoticamente stabile se è stabile, e se, per ogni soluzione* $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ *che soddisfa alla limitazione contenuta nella definizione di stabilità, vale ulteriormente*

$$\lim_{t \to +\infty} \sqrt{(\tilde{x}(t) - x(t))^2 + (\tilde{y}(t) - y(t))^2} = 0.$$

In genere, per studiare la stabilità di una soluzione, si effettua una notevole semplificazione, di natura analoga a quando, studiando un punto singolare di una funzione, si trasporta questo punto nell'origine; nel caso in esame, si può supporre di esaminare la soluzione identicamente nulla (ossia un punto critico in $(0, 0)$). Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases}$$

(ove si sono indicate le variabili con x_1, x_2 per suggerire che la considerazione si può estendere ad un numero qualsiasi di variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Sia $(x_1(t), x_2(t))$ una soluzione. Posti $y_1 = x_1 - x_1(t)$ e $y_2 = x_2 - x_2(t)$,

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{dx_1}{dt} - \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) - f_1(t, x_1(t), x_2(t)) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{dx_2}{dt} - \dfrac{dx_2(t)}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) - f_2(t, x_1(t), x_2(t)) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1 + x_1(t), y_2 + x_2(t)) - f_1(t, x_1(t), x_2(t)) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1 + x_1(t), y_2 + x_2(t)) - f_2(t, x_1(t), x_2(t)); \end{cases}$$

e infine

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = g_1(t, y_1, y_2) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = g_2(t, y_1, y_2) \end{cases}$$

con $g_1(t, 0, 0) = g_2(t, 0, 0) = 0$.

Con questa semplificazione, si illustra un importante risultato ottenuto da Ljapunov.

Questo risultato si fonda sulla osservazione intuitiva che se l'energia totale di un sistema fisico ha un minimo locale in un certo determinato punto di equilibrio, allora la configurazione di equilibrio è stabile. Si consideri dunque il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

(la dimostrazione si ripeterebbe inalterata per n-variabili e nell'esempio successivo si applicherà il teorema nel caso generale; la dimostrazione nel caso di due variabili tuttavia è completamente esplicativa), e sia $(0, 0)$ un punto critico isolato. Sia $\Gamma = (x_1(t), x_2(t))$ una traiettoria del sistema in una regione contenente $(0, 0)$ e sia $E(x_1, x_2)$ una funzione continua con derivate continue in tale regione. Lungo Γ si ha:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial E}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2} f_2.$$

Supponendo ora che $E(0, 0) = 0$, si dirà che E è definita positiva se $E(x_1, x_2) > 0$ per $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$; si dirà che è semidefinita positiva se $E(x_1, x_2) \geq 0$ per $(x_1, x_2) \neq 0$. Si dirà poi che E è una funzione di Ljapunov se è definita positiva e se

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2} f_2$$

è semidefinita negativa. Questa richiesta equivale a $dE/dt \leq 0$ e dunque E è non-crescente lungo Γ. Fissando l'attenzione su un intorno dell'origine, ove s'immagina tracciata Γ, si chiede in sostanza che E (che generalizza l'energia totale) abbia un minimo. È ora possibile enunciare il seguente teorema:

TEOREMA. *Se esiste una funzione di Ljapunov $E(x_1, x_2)$ per il sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

allora il punto critico (0, 0) *è stabile. Se inoltre la funzione $E(x_1, x_2)$ ha la proprietà ulteriore che la funzione*

$$\frac{\partial E}{dx_1} f_1 + \frac{\partial E}{dx_2} f_2$$

sia definita negativa, allora il punto critico è asintoticamente stabile.

Dimostrazione: Ci si limita alla prima parte dell'enunciato. Sia U un intorno chiuso di (0, 0) ove E sia definita. Poiché E è continua e positiva, avrà un valore minimo m in U. Poiché $E(0, 0) = 0$ ed E è continua, è possibile trovare un intorno U' ove sia $E(x_1, x_2) < m$. Sia ora $(x_1(t), x_2(t))$ una traiettoria con $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in U'$. Allora $E(x(t_0), y(t_0)) < m$ e poiché E è definita negativa si ha $dE/dt \leq 0$ ed allora $E(t) \leq E(t_0)$. Ne segue che la traiettoria $(x_1(t), x_2(t))$ non può lasciare l'intorno U'.

Da questo teorema si possono trarre importanti conseguenze, ad esempio per le equazioni di movimento di Hamilton (§ 3.3). Si enuncia il risultato nel caso di un massimo anziché di un minimo. Considerando un sistema olonomo conservativo ove q_i siano le coordinate generalizzate e p_i i momenti, se T indica l'energia cinetica (che è una forma quadratica definita e positiva nelle p_i) e $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ indica l'energia potenziale, si hanno le equazioni di movimento

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad H(q, p) = T - U$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Assumendo che in $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ vi sia una posizione di equilibrio e che U abbia un massimo, allora U è definita negativa e H è definita positiva. Si ponga $E = H$. Poiché H non dipende da t, si ha $dH/dt = 0$. Se ne conclude che se nella posizione di equilibrio l'energia potenziale ha un massimo, l'equilibrio è stabile.

1.7. Il moto kepleriano.

In questo paragrafo si accennerà a come sia possibile dedurre le leggi di Keplero a partire dalla legge di attrazione di Newton. Schematizzando il problema, si consideri (fig. 4) una piccola particella di massa m (un pianeta)

attratta da una grande massa M (il Sole) e si supponga che M eserciti una forza $\mathbf{f}$ diretta da m verso M (moto centrale). Anche l'accelerazione sarà allora diretta nello stesso modo. Se P è la posizione occupata da m, si ha dunque, indicando con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ rispettivamente la velocità e l'accelerazione,

$$(P - O) \wedge \mathbf{a} = 0$$

cioè

$$\frac{d}{dt}[(P - O) \wedge \mathbf{v}] = 0$$

il che implica

$$(P - O) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{c}$$

($\mathbf{c}$ costante). Il moto avviene dunque in un piano passante per O e perpendicolare al vettore $\mathbf{c}$, in altre parole si tratta di un moto piano. Sarà dunque conveniente particolarizzare in tal senso la scelta del riferimento. Ancora, per semplificare i calcoli si utilizzerà il sistema di coordinate polari.

Con riferimento alla figura 5 si ha $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$, dove $\mathbf{u}_r$ è il vettore unitario diretto nella direzione di $\mathbf{r}$. E poi

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i} \cos\vartheta + \mathbf{j} \sin\vartheta$$
$$\mathbf{u}_\vartheta = -\mathbf{i} \sin\vartheta + \mathbf{j} \cos\vartheta$$

e quindi

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\vartheta} = \mathbf{u}_\vartheta \qquad \frac{d\mathbf{u}_\vartheta}{d\vartheta} = -\mathbf{u}_r.$$

Si ha allora, per la velocità e per l'accelerazione,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\vartheta}{dt}\mathbf{u}_\vartheta + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(r\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\right)\mathbf{u}_\vartheta + \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{u}_r.$$

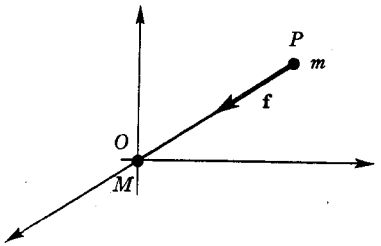


Figura 4.
Una particella di massa m (un pianeta) è attratta da una grande massa M (il Sole).

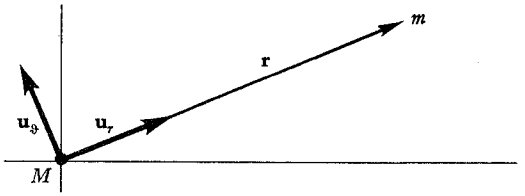


Figura 5.
Il moto kepleriano è descritto agevolmente in coordinate polari.

Scrivendo la forza **f** agente su m nella forma $\mathbf{f}=f_r\mathbf{u}_r$ ($f_\vartheta=0$ perché **f** è centrale), si deduce dalla seconda legge di Newton:

$$m\left(r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}\right)=0$$

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right)=f_r.$$

Allora

$$r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}=0.$$

Moltiplicando per r si ha

$$r^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+2r\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}=0,$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)=0.$$

Il che significa

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt}=h\ (\text{costante}).$$

Si consideri ora l'area $A=A(t)$ descritta dal raggio vettore **r**. Si ha

$$dA=r^2\frac{d\vartheta}{2}$$

e quindi si ottiene

$$dA=\frac{1}{2}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}h\,dt.$$

Da questa relazione infine si conclude

$$A(t_2)-A(t_1)=\frac{1}{2}h(t_2-t_1)$$

cioè la seconda legge di Keplero: il raggio vettore r descrive aree uguali in tempi uguali.

Si osserverà come questa legge sia in realtà solamente una legge del moto centrale, poiché si è supposto semplicemente $f_\vartheta=0$. Si supponga ora che, in accordo con la legge gravitazionale di Newton, sia

$$f_r=-G\frac{Mm}{r^2}.$$

Dalla seconda equazione si ha allora (ponendo $GMm=k$)

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=-\frac{k}{r^2}.$$

Si ponga ora al posto di r la variabile $z=1/r$ e si usi ϑ invece di t come variabile indipendente. Si ha allora

$$\frac{d^2z}{d\vartheta^2}+z=\frac{k}{h^2}.$$

La soluzione generale di questa equazione è data da

$$z=A\sin\vartheta+B\cos\vartheta+\frac{k}{h^2}$$

e, prendendo il riferimento in modo che per $\vartheta=0$ sia

$$\frac{dz}{d\vartheta}=0\qquad\frac{d^2z}{d\vartheta^2}<0$$

si ha $A=0$, $B>0$. Posto nuovamente $r=1/z$ si ottiene

$$r=\frac{\dfrac{h^2}{k}}{1+\left(\dfrac{Bh^2}{k}\right)\cos\vartheta}$$

ossia, ponendo $e=Bh^2/k$,

$$r=\frac{\dfrac{h^2}{k}}{1+e\cos\vartheta},$$

e si ha dunque l'equazione di una ellisse, cioè la prima legge di Keplero: l'orbita di un pianeta è una ellisse della quale il Sole occupa uno dei fuochi.

La terza legge di Keplero viene dedotta agevolmente dalle prime due: i quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori.

La grande semplicità con la quale all'interno della meccanica newtoniana si deducono le leggi di Keplero, ricavate da questi sperimentalmente con pazienti e laboriosissimi calcoli, convincerà certamente il lettore della grande «forza persuasiva» con la quale essa s'impose ai contemporanei.

Tuttavia, ancora cento anni dopo Hegel rimprovererà al «barbaro» Newton

l'uso del concetto di forza come esplicativo di alcunché. Ecco due passi assai significativi. Nella lettera a Goethe del 24 febbraio 1821, si trova: «Vedo invece Newton, e dopo di lui tutti i fisici, afferrare qualsiasi fenomeno complesso e perdersi completamente in esso, e cosí imbrigliare il cavallo per la coda, per cosí dire. È accaduto a tal proposito che essi presentassero delle circostanze del tutto indifferenti allo stato primitivo della cosa... come se fossero le condizioni della cosa stessa – e ammassarvi, costringervi e introdurvi dentro tutto ciò che si trova davanti e dietro» [1835, trad. it. p. 201].

Ancora, nell'*Enciclopedia* [1830]: «L'idea di raggi luminosi discreti e semplici, o di particelle e fasci di essi, dei quali deve consistere una luce limitata nella sua espansione, fa parte di quelle *barbariche categorie*, che Newton in ispecie ha rese dominanti nella fisica» (trad. it. I, p. 245).

Questa polemica tra Hegel e Newton viene spesso considerata con molta sufficienza, soprattutto da parte degli scienziati, i quali, immersi nella viva dialettica della scienza, sono spesso su posizioni filosofiche assai ingenue e profondamente antidialettiche. Ma a che cosa si contrappone in realtà Hegel? Piú che contro Newton, la critica hegeliana è rivolta contro gli sviluppi successivi della filosofia newtoniana, in altre parole contro il meccanicismo e il suo portato estremo, il determinismo. In esso Hegel non poteva non vedere che un'atroce parodia dello Spirito che liberamente si autodetermina.

Sarebbe assai interessante seguire per tutto l'Ottocento e fino ai nostri giorni lo sviluppo ed il progressivo decadere delle posizioni deterministiche, ma andremmo assai al di là dello scopo di questo articolo. Ci si limita semplicemente a ricordare l'evoluzione di pensiero che si è avuta intorno al problema degli n corpi.

Dopo la risoluzione del problema dei due e dei tre corpi, le difficoltà insormontabili relative al problema dei quattro corpi hanno cominciato ad ingenerare l'idea della necessità di un approccio diverso, ad esempio di tipo statistico. Ma questo approccio genera come conseguenza il vanificarsi delle posizioni deterministiche. Che importa dove sta il singolo corpo ad un dato istante? Ben altri parametri occorrono per descrivere il movimento globale! Non si può non riconoscere un notevole valore nella polemica citata alla posizione hegeliana.

2. *Equazioni alle derivate parziali.*

2.1. Esempi, definizioni.

Si veda come primo esempio quello dell'equazione delle corde vibranti. Questo problema era stato considerato da Giovanni Bernoulli il quale aveva trattato una corda vibrante come formata da n oggetti puntiformi pesanti, ugualmente distanti, congiunti da tratti di corda perfettamente elastici senza peso. In tale ipotesi, se s'immagina una corda di lunghezza l, disposta sull'asse delle ascisse, come nella figura 6, e si indica con x_k l'ascissa della k-esima massa,

si ha $x_k = k(l/n)$. Se si indica con u_k lo spostamento della k-esima massa, l'equazione ottenuta da Giovanni Bernoulli era

$$\frac{d^2u_k}{dt^2} = \left(\frac{na}{l}\right)^2 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}),$$

dove si pone $a^2 = lT/M$, indicando con T la tensione che è supposta costante, e M la massa totale.

D'Alembert, successivamente, si pose il problema della corda «continua». Una maniera naturale era quella di concepire la corda come formata da infiniti pezzi, sostituendo u_k con $u(t, x)$ e l/n con Δx. In tale ipotesi l'equazione di Bernoulli si riscrive:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{u(t, x+\Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\right].$$

Facendo tendere Δx a 0, si ottiene l'equazione:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ove ora $a^2 = T/\sigma$, σ essendo la massa per unità di lunghezza. Supponendo la corda fissata agli estremi, si hanno le condizioni ulteriori $u(t, 0) = 0$ e $u(0, l) = 0$. Se si suppone poi che al tempo $t = 0$ la corda abbia una configurazione assegnata da una certa funzione $f(x)$, si ha la condizione ulteriore $u(0, x) = f(x)$. Ancora, si può assumere la condizione che ogni particella abbia all'istante $t = 0$ velocità nulla, e dunque

$$\left.\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

La soluzione della (1) fu trovata da d'Alembert in maniera molto abile, osservando che la soluzione generale di un'equazione del tipo (1) è della forma $u(t, x) = \varphi(at+x) + \psi(x-at)$. Questa osservazione è suggerita dal fatto che una funzione del tipo $\varphi(at+x)$ prende nel punto x all'istante t il valore che essa prende nel punto $x+at$ all'istante 0. Se s'immagina che $\varphi(at+x)$ rappresenti in ogni istante la forma globale della corda, essa è ottenuta da $\varphi(x)$ con la traslazione $-at$. In altre parole $\varphi(x+at)$ rappresenta un'onda che si propa-

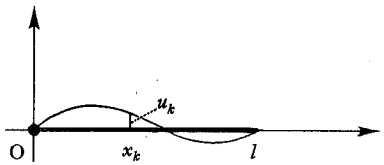


Figura 6.
La corda vibrante.

ga verso sinistra con velocità a. In modo analogo s'interpreta $\psi(x-at)$ come un'onda che si propaga verso destra. Pensare ad una soluzione del tipo $\varphi(x+at)+\psi(x-at)$ equivale quindi a pensare ad una soluzione come due onde che si propagano in direzioni opposte, il che è abbastanza plausibile dal punto di vista fisico. Posti ora $x+at=X$, $x-at=Y$, cioè $x=(X+Y)/2$, $t=1/a[(X-Y)/2]$ si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial Y}, \qquad \text{cioè } \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial X^2}+2\frac{\partial^2}{\partial X\,\partial Y}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=a\left(\frac{\partial}{\partial X}-\frac{\partial}{\partial Y}\right), \qquad \text{cioè } \frac{\partial^2}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}-2\frac{\partial^2}{\partial X\,\partial Y}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right).$$

Allora si ha:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}=-4\frac{\partial^2}{\partial X\,\partial Y}$$

e l'equazione assume la forma semplicissima

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X\,\partial Y}=0.$$

Questa equazione si risolve immediatamente, $\partial u/\partial X=\varphi(X)$, e quindi $u=\varphi(X)+\psi(Y)$. Sostituendo si ha infine $u=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$. La condizione $u(t,0)=0$ dà

$$0=\varphi(at)+\psi(-at),$$

cioè, posto $t'=at$, $\varphi(t')=-\psi(-t')$ e quindi

$$u=\varphi(at+x)-\varphi(at-x).$$

Poi, osservando che anche $u(t,l)=0$, si ha

$$\varphi(at+l)-\varphi(at-l)=0,$$

cioè

$$\varphi(at+l)=\varphi(at-l)$$

e dunque φ è periodica in $at+x$, di periodo $2l$. Dalla condizione

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

si ha ancora

$$\varphi'(x)=\varphi'(-x)$$

e cioè $\varphi(x)=-\varphi(-x)$. Allora $u(0,x)=\varphi(x)-\varphi(-x)=\varphi(x)+\varphi(x)=2\varphi(x)$. Essendo $u(0,x)=f(x)$ si ha $2\varphi(x)=f(x)$. Finalmente

$$u(t,x)=\frac{1}{2}f(at+x)-\frac{1}{2}f(-at+x).$$

La soluzione di questo problema fu data da d'Alembert anche con un altro metodo, quello della separazione delle variabili. Questo metodo, come si è già avuto occasione di vedere trattando delle equazioni differenziali ordinarie, diverrà una tecnica fondamentale per la risoluzione delle equazioni alle derivate parziali. Da esso verranno dedotte molte equazioni differenziali ordinarie di grande importanza, come quelle di Legendre, di Jacobi e altre. Il metodo consiste in questo: si cerca una soluzione u che sia della forma

$$u(x,t)=f(x)\,g(t).$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, si ottiene:

$$\frac{f''(x)}{f(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{g''(t)}{g(t)}.$$

Questa equazione è soddisfatta nel modo piú generale se si pone

$$\frac{f''(x)}{f(x)}=-w^2 \qquad \frac{1}{a^2}\frac{g''(t)}{g(t)}=-w^2,$$

cioè

$$f''(x)+w^2 f(x)=0, \qquad g''(t)+w^2a^2\,g(t)=0.$$

Le soluzioni generali di queste equazioni differenziali sono:

$$f(x)=A\cos wx+B\sin wx$$
$$g(t)=C\cos awt+D\sin awt.$$

Imponendo al prodotto $f(x)\,g(t)$ le condizioni al contorno si ottiene $A=0$, $A\cos wl+B\sin wl=0$; e cioè, se non si vuole u identicamente nulla, $\sin wl=0$, cioè $wl=n\pi$. Allora w deve essere della forma $n\pi/l$.

Per ogni numero intero n si ha dunque la soluzione

$$u_n=\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\left\{A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right\}$$

la quale, ponendo $A_n=\lambda_n\cos\gamma_n$, $B_n=-\lambda_n\sin\gamma_n$, può scriversi nella forma

$$u_n=\lambda_n\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\cos\left(a\frac{n\pi}{l}t+\gamma_n\right).$$

Se ora si forma la serie

$$u=\sum_1^\infty u_n=\sum_1^\infty\lambda_n\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot\cos\left(a\frac{n\pi}{l}t+\gamma_n\right)$$

questa, data la linearità dell'equazione (purché questa serie sia convergente), darà ancora una soluzione. Tenendo conto delle ulteriori condizioni iniziali si ricavano λ_n, γ_n e quindi A_n, B_n. Precisamente si trova che $B_n=0$ e che gli

A_n (in termini moderni) sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di $f(x)$. Piú in generale, se si fosse assunto come condizione iniziale

$$\left.\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

anche i B_n sarebbero risultati i coefficienti di Fourier dello sviluppo di $g(x)$.

Un altro esempio molto importante è quello costituito dall'equazione di Laplace.

Come si è già avuto occasione di accennare, uno dei maggiori problemi del secolo XVIII è la determinazione dell'attrazione gravitazionale che una massa esercita su un'altra (Sole, pianeti). Quando si considerano due corpi molto distanti, questo problema può essere schematizzato pensando a due corpi puntiformi. Se però quest'ipotesi non è piú plausibile, come nel caso della Terra e di un corpo nell'atmosfera terrestre, occorre tenere in considerazione anche la forma dei corpi.

Si consideri il caso semplice di un corpo esteso T che eserciti una certa determinata attrazione su una particella, che si suppone puntiforme, M (fig. 7). Se s'immagina che l'attrazione gravitazionale che si esercita su M sia la somma delle attrazioni che esercita ogni particella di T possiamo scrivere in forza della legge di Newton, con i simboli usati nella figura, le componenti della forza che la particella di volume $dx\,dy\,dz$ esercita su M:

$$f_X = -k\rho \frac{X-x}{r^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$f_Y = -k\rho \frac{Y-y}{r^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$f_Z = -k\rho \frac{Z-z}{r^2}\,dx\,dy\,dz$$

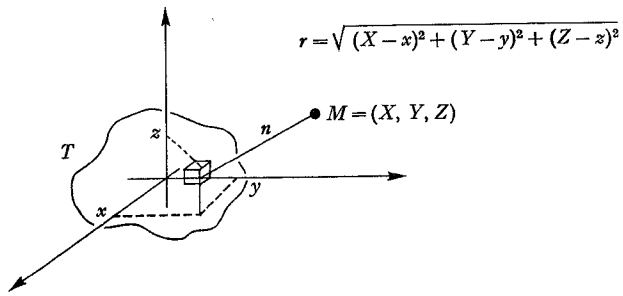


Figura 7.
Rappresentazione dell'azione di ogni particella di T su M.

ove k è la costante di Newton. La forza esercitata dal corpo ha allora le componenti:

$$f_X = -k\iiint_T \rho \frac{X-x}{r^3}\,dx\,dy\,dz$$

$$f_Y = -k\iiint_T \rho \frac{Y-y}{r^3}\,dx\,dy\,dz$$

$$f_Z = -k\iiint_T \rho \frac{Z-z}{r^3}\,dx\,dy\,dz.$$

Ora, invece di trattare separatamente f_X, f_Y, f_Z, si può introdurre la funzione

$$V(X, Y, Z) = \iiint_T \frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz$$

e da questa si riottengono f_X, f_Y, f_Z con

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{k} f_X \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{k} f_Y \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{k} f_Z.$$

La funzione V cosí introdotta viene detta potenziale. Il vantaggio di lavorare con questa funzione – a parte il significato fisico molto importante che si riesce a collegarle – è che in tal modo si utilizza una sola funzione, anziché tre. Nota V, si calcolano poi le componenti della forza calcolando le derivate. Il fatto principale riguardo alla funzione V (poiché il calcolo diretto di essa non è molto agevole) è che essa verifica l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0$$

il che ha spinto a uno studio sistematico di quest'equazione. Laplace in particolare diede importanti contributi al suo studio, ed essa è nota oggi, in effetti, come equazione di Laplace.

Come si è visto, si giunge a quest'equazione considerando la funzione V, le cui derivate forniscono le componenti della forza richiesta. Quest'idea, di far discendere le componenti di una forza da una funzione potenziale, era già stata utilizzata in altri settori della matematica da Daniele Bernoulli e da Eulero.

Se si considera un fluido in movimento e u, v, w indicano le componenti della velocità di una particella in un punto, Eulero aveva mostrato come si dovesse ritenere la quantità $dV = u\,dx + v\,dy + w\,dz$ un differenziale esatto. L'ipotesi che durante il movimento non si crei e non si distrugga materia si esprime con l'equazione differenziale

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

e tenendo conto del fatto che dev'essere

$$u=\frac{\partial V}{\partial x} \qquad v=\frac{\partial V}{\partial y} \qquad w=\frac{\partial V}{\partial z}$$

si ottiene ancora l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

L'equazione del calore fu ottenuta da Fourier considerando il problema di determinare la temperatura T in un corpo omogeneo ed isotropo come una funzione $T(x, y, z, t)$. Sulla base di principî fisici, egli pervenne all'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Trattando successivamente il problema in un caso particolare, cioè prendendo in considerazione una sbarra rettilinea di lunghezza l isolata, Fourier considerò l'equazione

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=k^2\frac{\partial T}{\partial t}$$

con le condizioni iniziali $T(0, t)=0$, $T(0, l)=0$ per $t>0$, unitamente a $T(x, 0)=f(x)$ per $0\leq x\leq l$. Utilizzando ancora il metodo di separazione delle variabili, cioè ricercando una soluzione della forma $T(x, t)=u(x)\,v(t)$, si arriva alle equazioni differenziali

$$u''(x)+\lambda k^2 u(x)=0$$
$$v'(t)+\lambda\, v(t)=0.$$

Le soluzioni generali si ottengono con un tipo d'indagine analogo a quello svolto per l'equazione delle corde vibranti e quindi non si proseguono qui i calcoli. Va citato tuttavia un fatto molto importante. Tenendo conto della condizione iniziale $T(x, 0)=f(x)$, Fourier si trovò a considerare un'uguaglianza del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx=f(x)$$

la quale lo spinse ad affrontare il problema generale (già postosi in effetti per il caso dell'equazione della corda vibrante) della possibilità di esprimere una funzione qualsiasi mediante una serie di funzioni trigonometriche, cioè, come si dice oggi, «in serie di Fourier».

Un problema molto simile di diffusione termica conduce all'equazione di Poisson. Questo esempio è molto importante, poiché per esso si presenta con molta chiarezza la significatività di due tipi di richieste iniziali, note rispettivamente come problema di Dirichlet e problema di Neumann.

Si supponga assegnato un corpo nel quale vi siano sorgenti di calore costanti

nel tempo e se ne indichi con $f(x, y, z)$ la densità. Se ancora si indica con $T(x, y, z)$ la temperatura nel generico punto (x, y, z) si ha l'equazione

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=f(x, y, z).$$

È chiaro come per determinare una soluzione si debbano ancora assegnare certe condizioni iniziali. Indicando con S la superficie del corpo considerato, una prima richiesta molto naturale può essere

$$(1) \qquad T(x, y, z)=a(x, y, z) \qquad \text{per } (x, y, z)\in S,$$

cioè di assegnare la temperatura sulla superficie esterna. Un'altra richiesta altrettanto naturale può però essere quella di assegnare il flusso di calore attraverso S; cioè, se si indica con $\mathbf{v}$ il vettore normale ad S, di chiedere che

$$(2) \qquad \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial \mathbf{v}}=b(x, y, z) \qquad \text{per } (x, y, z)\in S.$$

Le richieste (1) e (2) costituiscono appunto i problemi di Dirichlet e di Neumann.

Dall'equazione di Poisson, come caso particolare, per $f(x, y, z)=0$, si riottiene l'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0.$$

È ancora molto importante il caso di un'equazione di due variabili $u(x, y)$ che verifichi l'equazione di Laplace, cioè

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Se infatti $f(z)=f(x+iy)=u(x, y)+i\,v(x, y)$ è una funzione analitica, u e v sono soluzioni dell'equazione di Laplace. In questo caso si dice che u e v sono funzioni armoniche.

Come ultimo esempio, si citano le equazioni di Navier-Stokes, che regolano il movimento piano di un fluido viscoso non comprimibile non soggetto a forze. Indicando con $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ le componenti orizzontale e verticale della velocità, con $p(x, y, t)$ e $\rho(x, y, t)$ la pressione e la densità, è possibile trovare una costante μ in modo tale che si abbia

$$\rho u_t+\rho u u_x+\rho v u_y+p_x=\mu(u_{xx}+u_{yy})$$
$$\rho v_t+\rho u v_x+\rho v v_y+p_y=\mu(v_{xx}+v_{yy})$$
$$u_x+v_y=0.$$

In generale queste equazioni sono di difficile integrazione. Esse si possono semplificare notevolmente se si assume che il fluido sia in moto «lento». In tal caso si ha infatti che il termine $\rho(uu_x+vu_y)$ nella prima equazione e il ter-

mine $\rho(uv_x+vv_y)$ della seconda equazione possono essere trascurati e si ha cosí il sistema

$$\begin{cases} \rho u_t+p_x=\mu(u_{xx}+u_{yy}) \\ \rho v_t+p_y=\mu(v_{xx}+v_{yy}) \\ u_x+v_y=0 \end{cases}$$

il quale può essere trattato assai piú agevolmente.

Gli esempi dati dovrebbero ora avere rese completamente chiare le definizioni che seguono.

DEFINIZIONE. *Si dice equazione alle derivate parziali di ordine n un'espressione del tipo*

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_m; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_m^n}\right)=0.$$

Per soluzione di quest'equazione s'intende una funzione $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ che, sostituita nell'espressione insieme alle sue derivate parziali, la renda identicamente soddisfatta.

Se ad esempio si considera l'equazione $\partial^2 u/\partial x^2=0$, si ricava da questa uguaglianza $\partial u/\partial x=f(y)$, e quindi $u(x, y)=xf(y)+g(y)$. La soluzione cosí trovata è la piú generale soluzione dell'equazione alle derivate parziali, nel senso che ogni soluzione dell'equazione può essere espressa in questa forma. In generale, per un'equazione alle derivate parziali arbitraria – come del resto accade per un'equazione differenziale ordinaria – non è possibile dare una formula che esprima *tutti* gl'integrali dell'equazione. Però ancora si può definire l'integrale generale come una formula che esprima con sufficiente grado di generalità le soluzioni dell'equazione. Si può cosí dare la definizione:

DEFINIZIONE. *Si dice integrale generale di un'equazione alle derivate parziali una formula che, con eventualmente qualche eccezione, esprima la totalità degli integrali dell'equazione data.*

Dal semplice esempio illustrato, si osserva come l'equazione $\partial^2 u/\partial x^2=0$, che è del secondo ordine, abbia una soluzione che dipende da *due* funzioni arbitrarie. Questa circostanza è del tutto generale, poiché vale la proprietà: l'integrale generale di un'equazione di ordine n dipende da n funzioni arbitrarie. Di questo fatto si può dare un'illustrazione di natura qualitativa. È chiaro come per l'equazione $\partial^n u/\partial x_1^n=0$ la soluzione dipenda in effetti da n funzioni. Se ora si considera un'equazione alle derivate parziali che sia ponibile in *forma normale* e cioè risolvibile rispetto ad una delle derivate di ordine massimo, ad esempio x_1 (la quale ipotesi non è molto restrittiva), e si considera l'equazione nella forma

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}=f\left(x_1, \ldots, x_m, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots\right),$$

si può pensare che l'equazione $\partial^n u/\partial x_1^n=0$ sia ottenuta come caso limite quando si fa divenire $f=0$. È quindi naturale pensare che le soluzioni delle due equazioni debbano essere nello stesso numero. Questo ragionamento, per nulla rigoroso, dovrebbe tuttavia essere d'aiuto per capire il fenomeno generale.

Come si è avuto occasione di osservare negli esempi preliminari dell'equazione della corda vibrante, dell'equazione di Laplace, di quella del calore e di quella di Poisson, un'equazione differenziale non si presenta in forma astratta come «data l'equazione... trovare l'integrale generale». Piuttosto l'equazione – che, come si è visto, si può formulare in rapporto ad un problema fisico – è accompagnata da certi dati, le cosiddette «condizioni al contorno», che si pongono in maniera naturale accanto all'equazione stessa. Questi dati costituiscono una parte essenziale del problema. Ad esempio, la dipendenza continua e differenziabile della soluzione dai dati – che è un'ovvia necessità se si vuole dare un'interpretazione fisica della soluzione – non vale, in generale, per le equazioni alle derivate parziali. Questo può essere illustrato con il seguente esempio di Hadamard.

Si consideri l'equazione di Laplace (in due variabili)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

con le condizioni iniziali

$$u(x, 0)=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)=\frac{\sin nx}{n}.$$

Questa equazione ha l'unica soluzione analitica

$$u(x, t)=\frac{1}{n^2}Sh(ny)\sin nx.$$

Quando $n\to\infty$, il valore iniziale per $y=0$ tende a zero uniformemente e la sola soluzione del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ u(x, 0)=\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0)=0 \end{cases}$$

è $u(x, y)=0$. D'altro lato la soluzione $u(x, y)$ non tende a zero per $n\to\infty$. Questo esempio suggerisce che i dati iniziali assunti per l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

non sono ben scelti. Si motiva cosí la nozione di problema ben posto (nozione ancora dovuta a Hadamard).

È possibile considerare in astratto il problema della ricerca della soluzione

nel modo seguente: Sia dato un certo spazio funzionale (cioè uno spazio che ha per elementi funzioni) V. In esso si assegnino certi dati, cioè certe funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_p$. Si cerchi ora una soluzione u appartenente ad uno spazio funzionale W.

Il problema è ben posto quando 1) fissati comunque i dati $f_1, \ldots, f_p$, esiste una ed una sola soluzione u; e 2) la soluzione è stabile, ossia dipende con continuità dai dati.

Ma anche per quanto riguarda l'esistenza delle soluzioni si ha un comportamento diverso per le equazioni alle derivate parziali rispetto alle equazioni differenziali ordinarie. L'esistenza di soluzioni e l'unicità valgono infatti in condizioni determinate. Per ottenere buoni teoremi occorre eseguire una classificazione delle equazioni alle derivate parziali (cfr. § 2.2), cioè, in sostanza, occorre tenere in maggior conto la specificità dell'equazione che si considera. Si ha però un risultato di carattere generale molto importante, il teorema di Cauchy-Kowalesky, il quale può essere formulato per un sistema di equazioni del primo ordine in forma normale, ove si assumono come incognite certe funzioni $u_j(x_1, \ldots, x_n)$. I dati iniziali, in questo caso, vengono assunti nella forma nota come «problema di Cauchy», anzi vengono formulati come un problema di Cauchy particolare.

Il problema di Cauchy è una generalizzazione naturale del problema dei dati iniziali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie o equivalentemente per una equazione differenziale ordinaria di ordine n. Se è data un'equazione differenziale di ordine n, per determinare una soluzione $y(x)$ occorre assegnare, in un punto x_0, il valore $y(x_0)$ ed i valori delle prime $n-1$ derivate $y'(x_0), \ldots, y^{n-1}(x_0)$.

Se si considera un'equazione alle derivate parziali di ordine n, in due variabili x, y, verrà naturale chiedere che la funzione incognita $z(x, y)$, che si può interpretare come una superficie dello spazio x, y, z, e le sue derivate fino all'ordine $n-1$ abbiano assegnati valori lungo una linea Γ dello spazio. Se si considera invece un'equazione in m variabili $x_1, \ldots, x_m$, si tratterà di assegnare i valori lungo una superficie ad $m-1$ dimensioni. Nel caso trattato dal teorema successivo, il quale si riferisce ad un sistema di equazioni del primo ordine in forma normale (è sempre possibile trasformare un'equazione in forma normale di ordine qualsiasi in un tale sistema), si considereranno assegnati i valori sulla particolare ipersuperficie data dall'iperpiano $x_m = 0$.

TEOREMA (Cauchy-Kowalesky). *Si consideri il sistema in forma normale*

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_m} = f_j\left(x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots\right)$$

e si consideri il problema di Cauchy che consiste nell'assegnare sull'iperpiano $x_m = 0$ le condizioni $u_j(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_{m-1})$ e si supponga ancora che le funzioni f_j siano analitiche in un intorno del punto $x_1 = a_1, \ldots, x_{m-1} = a_{m-1}$, $x_m = 0$, che le funzioni φ_j siano analitiche in un intorno del punto $x_1 = a_1, \ldots, x_{m-1} = a_{m-1}$. Allora esiste una ed una sola n-upla di funzioni analitiche $u_j(x_1, \ldots, x_m)$ che soddisfa al sistema, alle condizioni iniziali, ed è analitica in un intorno di $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_{m-1} = a_{m-1}, x_m = 0$.

Non si esporrà la dimostrazione di questo teorema; si può osservare tuttavia come essa possa effettuarsi con il metodo della funzione maggiorante, come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie.

2.2. Equazioni del secondo ordine. Classificazione.

È stato mostrato nelle pagine precedenti come l'esistenza e il buon comportamento delle soluzioni di un'equazione alle derivate parziali siano legati, in maniera essenziale, alla forma specifica dell'equazione stessa. Ne consegue che una trattazione sistematica delle equazioni alle derivate parziali deve necessariamente compiersi attraverso classificazioni delle equazioni stesse in tipi omogenei, tenendo anche conto dei dati iniziali come parte essenziale per questa classificazione.

Poiché le equazioni alle derivate parziali che maggiormente intervengono nelle applicazioni sono equazioni del secondo ordine, soprattutto se lineari o semilineari, ci si limiterà a trattare questo caso. Si può osservare, del resto, che tutti gli esempi considerati in precedenza rientrano in questa trattazione.

Un'equazione alle derivate parziali viene detta semilineare quando in essa le derivate di ordine massimo compaiono linearmente, ossia, nel caso dell'equazione del secondo ordine,

$$(1) \qquad \sum_{i,j} A_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + f\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u\right) = 0.$$

L'equazione è invece lineare se tutte le derivate compaiono linearmente, ossia se è della forma

$$(2) \qquad \sum_{i,j} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_i B_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x_1, \ldots, x_n) u + f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Per semplificare, si utilizzerà la scrittura (1) anche quando l'equazione è lineare, in tal caso la

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u\right)$$

va pensata in modo che l'equazione abbia complessivamente la forma (2). È chiaro come una parte essenziale, per quanto riguarda un'equazione alle derivate parziali dei tipi considerati, sia da attribuirsi ai coefficienti $A_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ delle derivate seconde.

Un suggerimento per semplificare lo studio dell'equazione alle derivate parziali proviene dalla geometria. Se infatti si considera il cambiamento di coordinate dato da $X_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i$ l'equazione si riduce alla forma

$$\sum_{k,l}^{n}\left(\sum_{i,j}^{n}A_{ij}a_{ki}a_{lj}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial X_k\,\partial X_l}+\ldots=0.$$

In altre parole, i coefficienti delle derivate seconde si comportano come quelli della forma quadratica: $\sum A_{ij}x_ix_j$. Una tecnica fondamentale per lo studio delle forme quadratiche consiste nel determinare il cambiamento di coordinate in modo che la forma quadratica sia ridotta a forma canonica, ossia alla forma

$$\sum_{i=1}^{m}\pm X_i^2 \qquad m\leq n$$

ove il numero dei termini con segno positivo e negativo è determinato dalla «legge d'inerzia delle forme quadratiche». Se dunque si considera un punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, è possibile individuare una sostituzione di variabili

$$X_k=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}x_i$$

in modo che l'equazione assuma la forma

$$\sum_{i,j}A_{ij}^*(X_1, \ldots, X_n)\frac{\partial^2 u}{\partial X_i\,\partial X_j}+\ldots$$

ove si ha

$$A_{kl}^*=\sum A_{ij}\,a_{ki}\,a_{lj}$$

e, nel punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, sia

$$A_{ij}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)=\pm 1 \qquad \text{se } i=j\leq m$$
$$A_{ij}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)=0 \qquad \text{se } i\neq j \text{ o } i=j>m.$$

La forma cosí ottenuta per l'equazione alle derivate parziali viene detta forma canonica nel punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Naturalmente questa riduzione a forma canonica sarebbe ancora piú utile e significativa qualora si potesse garantire che essa vale non solamente in $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ma in tutto un intorno di questo punto. Ma questo è, in generale, impossibile se il numero delle variabili è maggiore di due.

Anzi, non solo questa riduzione è impossibile con una trasformazione lineare, ma si può mostrare come, scelta una regione arbitrariamente piccola, non sia possibile, e con qualsiasi trasformazione, ridurre ivi l'equazione a forma canonica. Questo mostra come vi sia una notevole diversità di complessità quando il numero delle variabili supera due. Per una trattazione sufficientemente semplice, quindi, si farà riferimento a questo caso, ossia all'equazione

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

ove la f deve avere forma opportuna quando l'equazione sia non solamente quasi-lineare ma addirittura lineare.

In questo caso la possibilità di ridurre l'equazione a forma canonica è legata al comportamento delle «caratteristiche», cioè dei due sistemi di curve definiti dall'equazione differenziale

$$A(dy)^2+2B\,dx\,dy+C(dx)^2=0$$

ossia

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

Si hanno le seguenti possibilità:

1) $B^2-AC<0$: l'equazione viene detta ellittica.
2) $B^2-AC>0$: l'equazione viene detta iperbolica.
3) $B^2-AC=0$: l'equazione viene detta parabolica.
4) B^2-AC non è di segno costante; in tal caso l'equazione viene detta di tipo misto.

Si esamini ad esempio il caso 2). Se le equazioni delle linee caratteristiche dei due sistemi sono date nella forma $\varphi(x, y)=\text{cost}$ e $\psi(x, y)=\text{cost}$, e si pone $X=\varphi(x, y)$ e $Y=\psi(x, y)$, sostituendo nell'equazione si ha ora, poiché le linee caratteristiche sono date da $X=\text{cost}$, $Y=\text{cost}$, che questa deve ridursi alla forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X\,\partial Y}+f\left(X, Y, u, \frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}\right)=0.$$

Oppure, ponendo $X=X'+Y'$ e $Y=X'-Y'$, alla forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X'^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial Y'^2}=f'\left(X', Y', u, \frac{\partial u}{\partial X'}, \frac{\partial u}{\partial Y'}\right).$$

Entrambe queste forme vengono intese come forme canoniche dell'equazione di tipo iperbolico. Nel caso ellittico, con analogo procedimento si ottiene la forma canonica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+f\left(X, Y, u, \frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}\right)=0$$

mentre nel caso parabolico infine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+f\left(X, Y, u, \frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}\right)=0.$$

Esaminando ora gli esempi trattati in precedenza (pensati quando sia necessario nel numero di due variabili), si osserva come l'equazione della corda vibrante sia di tipo iperbolico, l'equazione del calore di tipo parabolico e le equazioni di Laplace e di Poisson di tipo ellittico. Questi esempi corrispondono a fenomeni fisici di natura diversa: fenomeni di propagazione ondosa, di diffusione nel caso dell'equazione della corda vibrante e del calore, fenomeni stazionari nel caso dell'equazione di Laplace e di Poisson.

Questi fenomeni riflettono in maniera molto precisa il comportamento delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali del gruppo al quale appartengono. È possibile cioè prevedere, per le soluzioni di un'equazione di tipo iperbolico, lo stesso tipo di comportamento delle soluzioni dell'equazione delle onde e cosí per quanto riguarda le equazioni di tipo ellittico e parabolico. Come conseguenza di questo fatto si capisce come le condizioni al contorno debbano essere opportunamente coordinate al tipo di equazione che si considera. L'esempio di Hadamard illustrato in precedenza mostra in effetti come per un'equazione di tipo ellittico il problema di Cauchy in generale sia mal posto. I problemi naturali, in questo caso, sono quelli di Dirichlet e di Neumann.

2.3. Qualche proprietà delle equazioni di tipo ellittico.

In questo paragrafo si esamineranno alcune proprietà delle soluzioni di un'equazione di tipo ellittico [cfr. anche Bombieri 1974]. Già si è osservato come l'indagine intorno al comportamento delle soluzioni di un'equazione alle derivate parziali debba tener conto della specificità dell'equazione che si considera. In effetti nei risultati che si considerano è agevole vedere come la particolarità dell'equazione che si considera suggerisca dei procedimenti tipici non applicabili in altri casi.

Lo studio delle equazioni ellittiche si ottiene attraverso due principî fondamentali:

1) Le equazioni ellittiche descrivono lo stato stazionario di un certo sistema S. Si comincia quindi con l'osservare che un tale sistema deve avere energia totale minima. Il primo che ha isolato in una qualche generalità questo principio è stato Fermat; esso viene denominato principio di minima azione, ed è di fondamentale importanza nell'ambito della fisica matematica (cfr. anche il § 3). Il fatto che l'energia totale risulti minima viene espresso attraverso equazioni o disuguaglianze che controllano l'integrale delle derivate della funzione per mezzo della funzione stessa e dei dati iniziali. È utile osservare che funzioni di tipo arbitrario non permettono questo tipo di controllo, e pertanto le funzioni che sono soluzione di equazioni ellittiche formano una classe notevolmente ristretta. In generale sono funzioni di comportamento estremamente regolare. A questo proposito si deve a Hilbert (1900) l'avere attirato l'attenzione dei matematici su questa proprietà caratteristica sollevando la questione se le soluzioni di equazioni ellittiche analitiche siano necessariamente analitiche. La soluzione di questo problema è affermativa nel caso lineare (Bernstein, 1904) ed ammette invece eccezioni nel caso di sistemi non-lineari [cfr. Giusti e Miranda 1968].

2) Il secondo principio fondamentale valido per le equazioni del secondo ordine consiste nel principio del massimo. Da un punto di vista fisico questo principio s'illustra agevolmente attraverso l'esempio di una membrana elastica soggetta ai soli sforzi di tensione e fissata ad un contorno assegnato. Si vede allora che il punto di massimo innalzamento della membrana si trova sul

contorno. Nel caso di equazioni di ordine superiore, quale per esempio l'equazione per le piastre, il principio del massimo non è piú valido. Una piastra metallica costretta a stare in un contorno assegnato (la s'immagini costretta dentro una morsa) potrà presentare dei rigonfiamenti all'interno se lo sforzo di tensione è abbastanza elevato. Anche in questo caso, però, esistono formulazioni, di aspetto notevolmente tecnico, di risultati simili al principio del massimo che tuttavia hanno un'importanza minore nello studio delle proprietà delle soluzioni rispetto al principio del massimo classico.

In questi due esempi si è anche visto il problema tipico per le equazioni ellittiche: l'assegnazione di dati al contorno che determinano in modo unico la soluzione stazionaria, stabile. Nel caso di un problema del secondo ordine come quello della membrana il dato al contorno consiste nell'assegnare i valori della funzione soluzione al bordo; per l'equazione di ordine superiore, come nel caso della piastra, si possono avere dati di natura diversa i cui esempi tipici sono la piastra appoggiata al bordo e la piastra incastrata nel bordo. In questi due casi la distinzione viene fatta assegnando, oltre al valore della soluzione al bordo, anche il comportamento della derivata normale. Questo tipo di considerazioni è alla base di tutti i trattamenti delle equazioni ellittiche, anche nel caso non lineare.

Per vedere con maggior precisione un esempio tipico e fondamentale, che rappresenta tutti i fenomeni sopra descritti, si può considerare l'equazione di Laplace che corrisponde al caso della membrana elastica incontrata in precedenza. Quest'equazione è fondamentale e si ritrova nei problemi piú svariati. Incontrata da Laplace per la prima volta nei suoi studi sugli anelli di Saturno, incontrata nuovamente dai fisici nella descrizione dei campi elettrici e gravitazionali, si ritrova anche nelle matematiche pure, nello studio delle funzioni analitiche di variabile complessa. In due variabili essa si scrive

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Un tipico problema al contorno per questa equazione è, come si è visto, il problema di Dirichlet: esso consiste nell'assegnare sul contorno Γ di una regione finita G del piano (x, y) una funzione continua f. Si tratta di trovare una funzione $u(x, y)$ che sia armonica nell'interno di G e uguale ad f su Γ.

L'equazione di Laplace, nonostante rappresenti solo un esempio di equazione di tipo ellittico, è tuttavia esplicativa di molti fatti relativi al comportamento delle soluzioni dell'equazione generale di tipo ellittico. Si può formulare un principio di carattere pratico il quale consiste nel dire che ogni proprietà dell'equazione di Laplace, opportunamente riformulata, rimane vera per l'equazione generale. Si capisce quindi l'importanza dell'indagine intorno all'equazione di Laplace.

Nel seguito si ricaveranno alcune proprietà delle funzioni armoniche assumendo che esista una soluzione del problema di Dirichlet. In effetti è possibile dimostrare, se si assume G semplicemente connessa, l'esistenza della soluzione del problema [cfr. ad esempio Petrovski 1950].

Una importante proprietà delle funzioni armoniche, che in un certo senso continua i principî 1) e 2), è il teorema della media. Se $u(x, y)$ è una funzione armonica nell'interno di un cerchio di raggio r di centro (x_0, y_0) ed è continua sulla circonferenza, allora il valore della funzione u nel centro del cerchio, $u(x_0, y_0)$, è uguale alla media dei valori assunto da u sulla circonferenza. Si ha, in altre parole, indicata la circonferenza con Γ,

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_\Gamma u(P)\, d\Gamma.$$

Da questo teorema segue facilmente il principio del massimo. Di esso tuttavia esiste una dimostrazione elementare molto elegante dovuta a Privalov [*ibid.*, p. 169].

TEOREMA. *Se $u(x, y)$ è una funzione armonica in una regione G e continua in $G \cup \Gamma$, allora essa assume il valore massimo ed il valore minimo su Γ.*

Dimostrazione: Sia m il massimo di u su Γ e si supponga, per assurdo, che vi sia un punto Q interno a G ove u assume il valore massimo M. Si trasporti Q nell'origine con una traslazione e si consideri la funzione

$$v(x, y) = u(x, y) + \frac{M-m}{2d^2}(x^2+y^2)$$

ove d è il diametro della regione G. È chiaro che $u(0, 0) = (0, 0) = M$. È chiaro anche che in un punto di Γ si ha

$$v(x, y) \leq m + \frac{1}{2}(M-m) = \frac{1}{2}(m+M) < M$$

e dunque $v(x, y)$ deve avere il massimo in un punto interno. Ma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{M-m}{d^2} = \frac{M-m}{d^2} > 0$$

mentre in un massimo nessuna derivata seconda deve essere positiva. Per la dimostrazione relativamente al minimo basta considerare $-u$.

Da questo teorema si ricavano due conseguenze importanti, l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet e la dipendenza continua dai dati. Se u_1 e u_2 sono due soluzioni, la differenza $u_1 - u_2$ è ancora una soluzione la quale assume su Γ valore zero, ma allora non potendo assumere nell'interno né valore piú grande né piú piccolo deve essere identicamente nulla, cioè $u_1 = u_2$. Per la dipendenza continua si osservi che se u_1 e u_2 sono soluzioni corrispondenti a funzioni f_1 e f_2 su Γ e si assume $-\varepsilon < f_1 - f_2 < \varepsilon$, ne consegue che $-\varepsilon < u_1 - u_2 < \varepsilon$.

La proprietà di monotonia dimostrata per le funzioni armoniche si estende alle equazioni lineari omogenee del tipo

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)\, u = 0$$

e dunque anche per queste equazioni possiamo garantire l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet e la dipendenza continua dai dati.

A conclusione del paragrafo si riporta un risultato di carattere negativo il quale mostra come non tutte le proprietà delle funzioni armoniche si possano trasferire senza alcun problema alle equazioni ellittiche. Si consideri l'equazione ellittica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k^2 u = 0:$$

per essa è possibile assegnare delle condizioni in modo che il problema di Dirichlet non sia risolubile.

2.4. Soluzioni in senso debole.

L'esigenza di generalizzare il concetto di soluzione di un'equazione alle derivate parziali proviene sia dal confronto con i problemi fisici sia dalla necessità di una sistemazione dei problemi interni della teoria. Per quanto riguarda le esigenze interne della teoria si osserva che la necessità di una trattazione semplice e generale spinge a cambiare il concetto classico di soluzione. In effetti le due equazioni differenziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = 0$$

dovrebbero essere equivalenti, però la prima è soddisfatta da ogni funzione indipendente da y, mentre la seconda è possibile che non abbia alcun significato.

Questo motiva l'introduzione di nuovi enti, le distribuzioni, in modo da eliminare questo inconveniente. Si arricchisce cioè il concetto di soluzione ammettendo come soluzioni, accanto alle funzioni, anche «funzioni generalizzate», appunto le distribuzioni.

Assai piú pressante è l'esigenza di arricchire il concetto di soluzione in rapporto a problemi che riguardano i rapporti della matematica con la fisica e in generale con il mondo esterno (vi sono notevoli equivalenze tra le soluzioni in senso distribuzionale che s'introducono nel primo caso e le soluzioni deboli o debolissime che s'introducono nel secondo, ma i due tipi di soluzione corrispondono tuttavia ad esigenze metodologiche diverse). Si considera ad esempio l'equazione di Poisson in due variabili

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y);$$

se $f(x, y)$ è supposta discontinua, cosa assai plausibile dal punto di vista fisico, non possiamo naturalmente chiedere che la soluzione sia continua insieme alle sue derivate seconde. Viene quindi naturale cercare, in rapporto a questo e ad altri problemi, una nuova definizione di soluzione.

Si motiverà la definizione di soluzione debole con un esempio, mostrando

come essa sia deducibile in maniera molto naturale, partendo dal principio di Hamilton. Si consideri l'equazione della corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x, t)$$

con le condizioni al contorno $u(0, t)=0$, $u(l, t)=0$ e si cerchi una soluzione nel rettangolo Ω dato da $0\leq x\leq l$, e $0\leq t\leq \bar{t}$. Se $h(x, t)$ è una qualsiasi funzione a quadrato assolutamente integrabile, ossia tale che

$$\int_\Omega |h(x, t)|^2\, d\Omega<+\infty,$$

allora vi è equivalenza tra il fatto che u sia soluzione dell'equazione della corda vibrante ed il fatto che u sia dotata di derivate seconde *continue* e verifichi per ogni h l'equazione

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)h\, d\Omega=\int_\Omega fh\, d\Omega.$$

Questo motiva la definizione di soluzione quasi ovunque:

DEFINIZIONE. *Una funzione $u(x, t)$ a quadrato assolutamente integrabile è detta «soluzione quasi ovunque» in Ω dell'equazione della corda vibrante se ammette derivate prime e seconde a quadrato assolutamente integrabile e soddisfa $u(0, t)=0$, $u(l, t)=0$, e, per ogni h,*

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)h\, d\Omega=\int_\Omega fh\, d\Omega.$$

Si è in tal modo generalizzato il concetto di soluzione, poiché non è piú richiesta la continuità delle derivate seconde.

Un'ulteriore generalizzazione del concetto di soluzione si può ottenere immaginando di ricavare l'equazione delle onde a partire dal principio variazionale di Hamilton. Al tempo t l'energia cinetica e l'energia potenziale della corda sono date da

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$V=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx.$$

Allora l'azione hamiltoniana è data da

$$\int_0^{\bar{t}}(T-V)\, dt=\int_0^{\bar{t}}\left[\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx-\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right] dt.$$

L'azione deve risultare stazionaria quando si consideri una variazione $h(x, t)$ la quale sia della stessa classe funzionale di u e per la quale sia $h(x, 0)=$ $=h(x, t)=0$. In particolare, dovrà essere $h(0, t)=u(0, t)=0$ quasi ovunque ed anche $h(l, t)=u(l, t)=0$ quasi ovunque. Ne segue allora, imponendo l'annullarsi della prima variazione,

$$(1)\qquad \int_0^{\bar{t}}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+fh\right) dx\, dt=0.$$

Quest'equazione può immaginarsi ottenuta a partire dall'equazione

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)h\, d\Omega=\int_\Omega fh\, d\Omega$$

supponendo che h sia una funzione per la quale valgano le ipotesi della (1). In particolare dovrà essere dotata di derivate prime a quadrato integrabile. Infatti, si ha:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)h=\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}h\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h\right)\right\}-\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}\right\}$$

e quindi

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)h\, d\Omega=-\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}\right) d\Omega+\int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}h\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h\right)\right] d\Omega.$$

Ma segue facilmente, dalla formula di Green, come il secondo integrale sia nullo nelle ipotesi in cui siamo e perciò:

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)h\, d\Omega=-\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}\right) d\Omega.$$

Si è cosí verificato come la (1) possa essere ottenuta dall'equazione che definisce il concetto di soluzione quasi ovunque, restringendo la variabilità delle funzioni h che si considerano. Abbiamo cosí una soluzione piú generale dell'equazione delle onde. Si ha dunque:

DEFINIZIONE. *$u(x, t)$ è detta una soluzione debole in Ω dell'equazione della corda vibrante*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x, t)$$

se è di quadrato assolutamente integrabile insieme alle sue derivate prime e soddisfa l'equazione

$$\int_\Omega\left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}\right) d\Omega=\int_\Omega fh\, d\Omega$$

per ogni $h(x, t)$ tale che sia $h(x, 0)=h(x, \bar{t})=h(0, t)=h(l, t)=0$ quasi ovunque.

Questo esempio è completamente esplicativo di cosa si debba intendere in generale per soluzione debole di un'equazione alle derivate parziali. Si noterà come in questa definizione compaiono solamente le derivate prime della funzione u.

Come si è già osservato, un altro modo per generalizzare il concetto di soluzione proviene dalla considerazione delle distribuzioni.

Una collezione di soluzioni di un'equazione alle derivate parziali, quando è pensata come uno spazio funzionale, non è in generale, rispetto ad una metrica che si considera, uno spazio completo. Le distribuzioni possono essere introdotte (Sobolev, 1936) per questa via, completando lo spazio.

Sia Ω un dominio convesso del piano e si consideri una funzione $f(x, y)$ che sia definita e continua insieme alle sue derivate fino all'ordine l in un certo dominio contenente Ω. Si può introdurre la norma

$$\|f\| = \left(\iint_G |f(x, y)|^p \, dx \, dy + \sum_{l_1+l_2=l} \iint_G \left| \frac{\partial^l f(x, y)}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}} \right|^p dx \, dy \right)^{1/p},$$

e si ottiene uno spazio vettoriale normato, denotato $\tilde{W}_p^{(l)}$. Il completamento di questo spazio, che si indica con $W_p^{(l)}$, è lo spazio di Sobolev. Per farsi un'idea di come siano costituiti gli elementi di questo spazio, si consideri un elemento f in $W_p^{(l)}$ ma non in $\tilde{W}_p^{(l)}$. Per definizione esiste allora una successione $\{\varphi_n(x, y)\}$ tale che

$$\|\varphi_n(x, y) - f(x, y)\|_{W_p^{(l)}} \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Ossia

$$\iint_G |\varphi_m(x, y) - \varphi_n(x, y)|^p \, dx \, dy \to 0$$

ed anche

$$\iint_G \left| \frac{\partial^l \varphi_m}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}} - \frac{\partial^l \varphi_n}{\partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2}} \right|^p dx \, dy \to 0.$$

Per la completezza di $L_p(\Omega)$ esistono allora delle funzioni φ_0, $\varphi_0^{(l_1, l_2)}$, alle quali convergono le successioni di Cauchy $\{\varphi_n\}$ e $\{(\partial^l \varphi_n / \partial x^{l_1} \, \partial y^{l_2})\}$. Identificata f con φ_0, $\varphi_0^{(l_1, l_2)}$ sarà la derivata generalizzata di ordine l di φ_0.

Si è cosí definita la derivata generalizzata, o, in senso distribuzionale, di un elemento dello spazio di Sobolev. Gli elementi dello spazio di Sobolev vengono detti distribuzioni e quanto si è visto equivale ad una generalizzazione a questi elementi del calcolo differenziale ordinario, poiché è possibile dimostrare che le derivate in senso distribuzionale hanno le usuali proprietà che esse possiedono nel calcolo ordinario. In particolare, naturalmente, se una funzione è già derivabile, le sue derivate in senso distribuzionale non sono altro che le derivate ordinarie.

Disponendo di un nuovo, piú generale concetto di derivata, è possibile naturalmente riformulare la nozione di soluzione di un'equazione alle derivate parziali *in senso distribuzionale*. Si può mostrare come la nozione di soluzione debole data in precedenza possa essere interpretata in senso distribuzionale.

Si osservi, per concludere, come spesso le distribuzioni vengono presentate (Schwartz, al quale anzi va attribuita la paternità del concetto) come funzionali lineari continui sullo spazio $\mathfrak{D}(\Omega)$ delle funzioni indefinitamente differenziabili a supporto compatto contenuto in Ω. Si può mostrare come anche in tal caso si possa estendere la nozione di derivata e come le due definizioni di distribuzione e di derivate distribuzionali coincidano [cfr. ad esempio Lusternik e Sobolev 1961].

2.5. Equazioni di evoluzione.

Si è accennato nell'introduzione al legame che intercede tra la formulazione di un problema fisico mediante equazioni differenziali e il determinismo. Si vuol ora mostrare come un corollario di questo principio, il principio di Huygens, sia legato all'esistenza di certi gruppi (piú esattamente semigruppi) di operazioni funzionali.

L'origine di questi studi si può far risalire a Picard (1895), ma è sostanzialmente a Hadamard [1924] che si deve il maggiore contributo. Hadamard definisce cosí il principio del determinismo: «Dallo stato dell'universo all'istante t_0, si può dedurre lo stato ad un istante ulteriore t'». Come corollario di questo principio Hadamard ricava: «Questa deduzione può operarsi mediante un qualsiasi istante t_1 tale che $t_0 < t_1 < t'$, poiché lo stato in t_0 permette di calcolare quello in t_1 e questo lo stato in t'», ossia il principio di Huygens.

Ancora a Hadamard si deve l'osservazione del fatto che il principio stesso si riflette in un certo (semi)gruppo di trasformazioni associato con la soluzione del problema fisico considerato. Nel caso studiato da Hadamard originariamente, il problema di Cauchy per le equazioni differenziali di tipo iperbolico, poiché i fenomeni sono reversibili, si ottiene in effetti un gruppo di trasformazioni. Nel caso irreversibile si associa invece in maniera naturale un semigruppo. Questo corrisponde al fatto che non si può dedurre in generale lo stato di un sistema fisico da quanto è accaduto in precedenza.

Un esempio molto semplice. Conoscendo ad un certo istante le condizioni di riscaldamento di una stanza, posso dedurre l'evoluzione futura della temperatura. Se sono però in una stanza riscaldata uniformemente *non* posso conoscere lo stato del termosifone in un tempo precedente. È estremamente intuitivo il fatto che numerose possibili evoluzioni della temperatura possono aver condotto allo stato attuale.

La trattazione matematica del problema può essere affrontata con l'esempio seguente, ampiamente esplicativo: si consideri l'equazione del calore per una sbarra infinita

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty, \; t > 0$$

congiuntamente alla condizione iniziale $u(x, 0) = f(x)$, ove si suppone che $f(x)$ appartenga allo spazio delle funzioni limitate, uniformemente continue a valore reale. Questo spazio sarà indicato con X. Una soluzione $u(x, t)$ della

equazione data sia $u(x, t; f)$, per mettere in evidenza la dipendenza dalla funzione f. Si supporrà ancora – è essenziale – che esista un'unica soluzione, per la quale essa stessa e le derivate richieste stiano in X per ogni $t>0$, e che si abbia ancora

$$\lim_{t\to 0^+} u(x, t; f) = f(x).$$

Il principio di Huygens formulato in questo caso diviene: «Se la temperatura $u(x, t)$ è determinata in modo unico al tempo $t>0$ dalla distribuzione iniziale $f(x)$, allora $u(x, t)$ può anche essere ottenuta calcolando la temperatura stessa ad un istante intermedio t_0».

La formulazione matematica diviene allora:

$$u(x, t; f) = u(x, t-t_0; u(\cdot, t_0; f)).$$

Per ogni $t>0$, $u(x, t; f)$ può essere considerata una trasformazione effettuata sulla funzione f; per mettere in evidenza questo fatto si scrive

$$u(x, t; f) = [W(t)f](x).$$

La trasformazione $W(t)$ è lineare, a causa della linearità del problema. Si ha cioè

$$W(t)(f+g) = W(t)f + W(t)g.$$

La proprietà espressa dal principio di Huygens diviene ora

$$W(t_1+t_2)f = W(t_1)[W(t_2)f].$$

Questo fatto si esprime dicendo che $W(t)$ ha la proprietà di semigruppo. La condizione iniziale viene poi riformulata con

$$\lim_{t\to 0^+} \|W(t)f - f\| = 0$$

ove

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|.$$

La proprietà isolata in modo enfatico per $W(t)$ mostra in modo molto caratteristico quale sia il tipico procedimento matematico. Mentre ci si sarebbe potuti accontentare dell'equazione $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ e delle proprietà osservate – e questo non sarebbe né limitativo né sbagliato: si tratterebbe solamente di operare all'interno di una data problematica –, il procedere matematico va oltre, cercando la ragione profonda, la «causa» delle cose. Cosa è realmente significativo nel fenomeno che stiamo esaminando? Cosa rimane quando si prescinde da ogni particolarità? Il concetto di semigruppo che è stato appena isolato; e questo dunque viene posto come centrale, a fondamento della teoria. Si osserverà come in tutto questo non vi sia assolutamente nulla che assomigli al dedurre a partire da certe premesse, cosa alla quale molti vorrebbero ridurre la matematica. Vi è invece una profonda interazione dialettica tra realtà, teoria, riflessione su di essa, nuovo confronto con la realtà... Insomma, la Dialettica nella sua piú piena ed efficace espressione!

Si esaminerà ora la connessione tra il semigruppo di operatori $\{W(t); 0\leq t<+\infty\}$ e l'equazione data. A tal fine occorre introdurre il generatore infinitesimale

$$U_f = \lim_{\tau\to 0^+} \frac{W(\tau)-I}{\tau} f.$$

Ora, disponendo di U, è possibile scrivere

$$\frac{u(\cdot, t+\tau; f) - u(\cdot, t; f)}{\tau} = W(t)\left\{\frac{W(\tau)-I}{\tau}\right\} f = \left\{\frac{W(\tau)-I}{\tau}\right\} W(t)f =$$

$$= \left\{\frac{W(\tau)-I}{\tau}\right\} u(\cdot, t; f).$$

Se ora si considera il limite per $\tau\to 0^+$ si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = Uu(x, t),$$

il che mostra come sia

$$U = \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Le considerazioni che sono state sviluppate suggeriscono di porsi in un contesto piú generale. Sia X un dato spazio di Banach. Sia $\{W(t); 0\leq t<+\infty\}$ un semigruppo di operatori lineari limitati su X; sia cioè $W(t_1+t_2) = W(t_1)\,W(t_2)$, $W(0)=I$. Si supponga ancora che valga

$$\forall f \lim_{t\to 0^+} [W(t)f - f] = 0,$$

il che sarà espresso dicendo che vale la proprietà $(\mathcal{C}_0)$ su X. In queste ipotesi si può mostrare che il generatore infinitesimale U risulta essere un operatore chiuso con dominio $D(U)$ denso in X. Si può ora formulare, seguendo Hille, il problema di Cauchy astratto:

PROBLEMA. Dati uno spazio di Banach X e un operatore lineare U con dominio $D(U)$ e codominio $R(U)$ contenuti in X, ed assegnato un elemento $f_0\in X$, si tratta di trovare una funzione $u(t) = u(t; f_0)$, definita su $[0, \infty)$ con valori in X tali che

I) $u(t)$ è differenziabile con continuità su $[0, \infty)$ nella data norma;
II) $u(t)\in D(U)$ e $u'(t) = Uu(t)$ per ogni $t>0$;
III) si ha

$$\lim_{t\to 0^+} \|u(t) - f_0\| = 0.$$

Se U risulta essere il generatore infinitesimale di un semigruppo di operatori $\{W(t); 0\leq t<\infty\}$ la funzione $u(t) = W(t)f$ è una soluzione del problema per ogni f. È possibile dimostrarne l'unicità.

È chiara di conseguenza l'importanza di decidere se dato un operatore lineare chiuso U esista un semigruppo $W(t)$ che lo ammetta come generatore infinitesimale. Un risultato importantissimo in questo senso è il teorema di Hille-Yosida. Esso fa intervenire l'insieme risolvente $\rho(U)$ di U, ossia l'insieme dei valori λ per i quali l'operatore $\lambda I - U$ ha un inverso limitato con dominio denso in X. Utilizzando questi valori del parametro λ il teorema può enunciarsi:

TEOREMA. *Se U è un operatore lineare chiuso da X in sé con dominio denso e se $(\lambda I - U)^{-1}$ esiste per ogni $\lambda > 0$ con $\|(\lambda I - U)^{-1}\| \leq 1/\lambda$, allora U è il generatore infinitesimale di un semigruppo di operatori $\{W(t);\ 0 \overset{c}{=} t < \infty\}$ di classe $(\mathcal{C}_0)$ su X tale che $\|W(t)\| \leq 1$ per ogni $t \geq 0$. Inoltre il semigruppo $\{W(t);\ 0 \leq t < \infty\}$ è unico.*

Per concludere, si accennerà ai legami tra quanto è stato esposto e la trasformata di Laplace. Si consideri l'equazione $u'(t) = Au(t)$, $u(0) = f$. Applicando la trasformata di Laplace, si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} u'(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} A u(t)\, dt = A \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t)\, dt =$$

$$= p \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t)\, dt - u(0).$$

Posto $U(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t)\, dt$, si ha $pU(p) - f = AU(p)$, cioè $(A - pI)U(p) = -f$, il che mostra come possa ricavarsi $U(p)$ e quindi, applicando la trasformata inversa, $u(t)$. Tra l'altro l'ultima formula trovata giustifica la presenza dell'operatore $\lambda I - U$ nel teorema di Hille-Yosida.

3. *Calcolo delle variazioni.*

3.1. La brachistocrona.

Il problema della brachistocrona viene trattato nei particolari sia per fornire una conveniente introduzione al calcolo delle variazioni, sia per mostrare, su un importante esempio, quale fosse il modo di procedere di un matematico della fine del secolo XVII. Si avrà cosí modo di osservare come l'analisi e la soluzione del problema condotte da Giovanni Bernoulli siano assolutamente «moderne»; dimostrando cosí la sostanziale unità che intercorre tra il calcolo differenziale dell'epoca di Bernoulli e quello attuale. Unità che spesso viene a cadere quando si contrappone la matematica moderna a quella precedente fondandosi in gran parte sul fatto che il linguaggio della matematica attuale è molto piú formale e rigoroso.

S'immagini che A e B siano due punti dello spazio di differente quota (fig. 8). Il problema della brachistocrona è di decidere quale, fra le possibili

curve, debba seguire un grave che scivoli senza attrito in modo che il tempo impiegato per la discesa sia minimo. Il problema, per quanto, a prima vista, la cosa paresse strana, fu collegato da Bernoulli a un problema di ottica. Supponendo che A e B siano collocati in mezzi differenti, in modo che la luce percorra il mezzo ove si trova A con velocità v_1 e quello ove si trova B con velocità v_2, il tempo necessario per andare da A a B (fig. 9) è dato da

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}.$$

Se s'immagina che la luce segua il percorso nel minimo tempo possibile, si ricava l'uguaglianza

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}},$$

la quale comporta

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}.$$

S'immagini ora che il raggio luminoso debba attraversare un percorso stratificato, come nella figura 10. Si ha allora

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = \frac{\sin\alpha_3}{v_3} = \frac{\sin\alpha_4}{v_4}.$$

Se s'immagina ora di avere numerosi strati via via piú sottili e numerosi, passando al limite si avrà

$$\frac{\sin\alpha}{v} = \text{cost}.$$

Considerando ora nuovamente il problema della brachistocrona e scegliendo il riferimento come nella figura 11, se s'immagina che il corpo nello scivolare da A verso B sia in grado (come il raggio di luce) di scegliere il percorso in modo da minimizzare il tempo, si avrà ancora $\sin\alpha / v = \text{cost}$. Per il principio di conservazione dell'energia, la velocità raggiunta dal grave a un dato livello è data dalla perdita di energia potenziale, si ha cioè $v = \sqrt{2gy}$. Poiché $\sin\alpha = 1/\sqrt{1 + (y')^2}$, si ottiene l'equazione differenziale $y[1 + (y')^2] = \text{cost}$ che è la soluzione del problema. Come si è già osservato nel paragrafo sulle equazioni differenziali, la curva-soluzione risulta essere una cicloide.

Si osserverà come quest'equazione differenziale sia stata ottenuta considerando il problema nella sua specificità, osservando cioè come dovesse risultare, per la curva-soluzione, $\sin\alpha / v = \text{cost}$. Ma immaginando, in una fase precedente, di ricercare la soluzione tra varie possibili, allora si tratta di decidere quale curva $y(x)$ faccia assumere valore minimo all'integrale

$$\int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx,$$

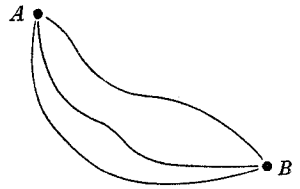


Figura 8.
Ancora il problema della brachistocrona.

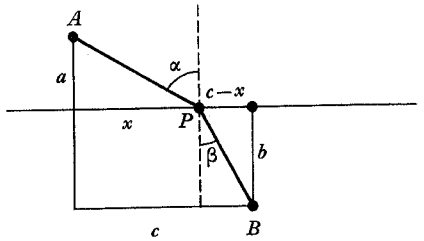


Figura 9.
Il problema della brachistocrona: vale l'analogo della legge di rifrazione.

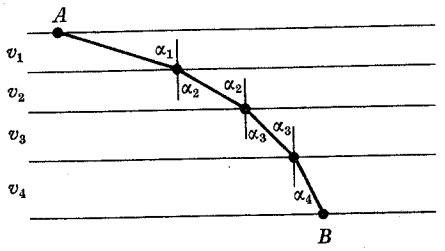


Figura 10.
L'idea «ottica» di Bernoulli per risolvere il problema della brachistocrona.

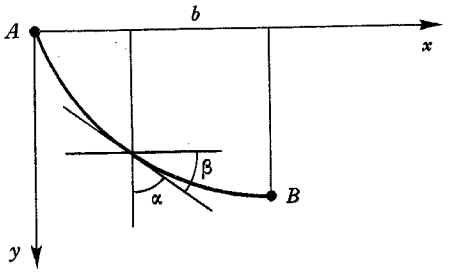


Figura 11.
Dalla spezzata della figura 10 si ottiene, passando al limite, la curva in figura.

il quale esprime il tempo necessario per andare da A a B. Cosí il problema può formularsi astrattamente nel modo seguente: dato il funzionale $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$ ove F è supposta continua insieme alle sue derivate fino al secondo ordine in un certo dominio B del piano (x, y) e per ogni valore di y', si tratta di determinare una funzione $y(x)$ in modo che esso assuma il valore minimo. È naturalmente lo stesso problema chiedere che tale funzionale assuma un valore massimo.

Come nel caso delle funzioni di variabile reale, è poi naturale considerare non tanto massimi e minimi assoluti, quanto relativi. Si è cosí giunti a formulare uno dei problemi centrali del calcolo delle variazioni. Ecco la definizione che ne dà Lagrange [1760-61, ed. 1867 p. 335]: «Per poco che si sappia dei principî del Calcolo differenziale, si conosce il metodo di determinare le ordinate piú grandi e le minime delle curve; ma vi sono delle questioni di massimo e minimo di genere piú elevato e che, sebbene dipendenti dallo stesso metodo, non si trattano con la stessa facilità. Sono quelle in cui si tratta di trovare le curve stesse nelle quali una data espressione integrale sia massima o minima in rapporto a tutte le altre curve». Oggetto del calcolo delle variazioni è quindi determinare i valori estremanti di un dato funzionale. Nel caso piú semplice, tale funzionale è quello considerato in precedenza, ma è chiaro come il problema possa formularsi in maniera assai piú astratta per un certo funzionale $L(y(x))$, qualsiasi.

3.2. L'equazione di Eulero, il lemma fondamentale.

Si consideri dunque il funzionale $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$ in cui F è una funzione come specificato in precedenza. Ci si propone di trovare una funzione $y(x)$ la quale faccia assumere a questo funzionale un valore estremante. Si vuole dedurre una condizione necessaria che $y(x)$ deve soddisfare affinché il funzionale abbia in $y(x)$ un tale valore. Si consideri una funzione $\eta(x)$, la quale si annulli negli estremi dell'intervallo d'integrazione e, considerato un parametro numerico α (da pensarsi intuitivamente come molto piccolo), si consideri la nuova funzione $y(x)+\alpha\eta(x)$. L'idea che guida questa considerazione è quella di variare di poco la funzione $y(x)$, e di considerare conseguentemente il comportamento del funzionale, come si fa nel caso ordinario delle funzioni reali di variabile reale. Sostituendo al posto di $y(x)$, la funzione $y(x)+\alpha\eta(x)$ si ottiene:

$$\mathcal{J}(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\alpha\eta(x), y'(x)+\alpha\eta'(x))\, dx.$$

Poiché $y(x)$ deve corrispondere ad un valore estremante, la funzione $\mathcal{J}(\alpha)$ deve avere un estremo per $\alpha=0$, e dunque la sua derivata deve annullarsi per $\alpha=0$. Differenziando sotto il segno d'integrale si ottiene:

$$\mathcal{J}'(0)=\int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y')\eta(x)+F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)]\, dx.$$

Integrando per parti, si può ora scrivere

$$\mathcal{J}'(0)=[F_{y'}\,\eta(x)]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right]dx$$

e, tenendo conto del fatto che $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, si ha infine

$$\mathcal{J}'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right]dx.$$

Come si è osservato, dev'essere $\mathcal{J}'(0)=0$ e perciò

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right]dx=0.$$

Questa uguaglianza deve valere per ogni funzione ed è dunque naturale immaginare come essa implichi

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0.$$

Per dimostrarlo rigorosamente occorre però il seguente:

LEMMA FONDAMENTALE. *Se l'integrale $\int_{x_0}^{x_1}f(x)\eta(x)\,dx$ in cui $f(x)$ è una funzione continua, si annulla per tutte le funzioni $\eta(x)$ che si annullano in x_0 e in x_1 e che ammettono una derivata continua in (x_0, x_1), allora si ha $f(x)=0$.*

Tornando dunque a considerare l'uguaglianza

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right]dx=0,$$

poiché con le ipotesi poste su F la funzione

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}$$

è continua, si ha infine l'equazione di Eulero:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0.$$

Va osservato che le ipotesi poste, molto restrittive poiché si è utilizzata l'esistenza di $y''(x)$, possono essere molto indebolite. Va tuttavia oltre gli scopi del presente articolo addentrarsi in tali questioni.

L'equazione di Eulero può essere sviluppata conducendo all'equazione del secondo ordine

$$F_{y'y'}\,y''+F_{yy'}\,y'+F_{xy'}-F_y=0.$$

Queste considerazioni possono generalizzarsi al caso di funzionali che dipendano da piú funzioni, come $\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y', z, z')\,dx$ o a funzionali in cui

compaiono derivate di ordine piú elevato, come $\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,dx$. A parte le maggiori complicazioni formali, l'equazione di Eulero può essere ricavata nuovamente con la stessa tecnica. Va segnalato invece in modo esplicito il caso dell'equazione di Eulero negli integrali doppi.

Si consideri l'integrale doppio

$$(1)\qquad \iint_B F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy$$

e ci si proponga di trovare una funzione $u(x, y)$ che sia continua con le sue derivate fino al secondo ordine in un dominio B, abbia un assegnato valore sul contorno l del dominio e dia valore estremante al funzionale (1). Con un ragionamento analogo a quello con cui è stata ottenuta l'equazione di Eulero, e applicando il lemma fondamentale opportunamente adattato al caso che si considera, si ottiene l'equazione di Eulero

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0$$

che può scriversi, esplicitando,

$$F_{u_xu_x}u_{xx}+2F_{u_xu_y}u_{xy}+F_{u_yu_y}u_{yy}+F_{u_xu}u_x+F_{u_yu}u_y+F_{yu_y}-F_u=0.$$

Le equazioni trovate sono, naturalmente, solo delle condizioni necessarie affinché una funzione $y(x)$ o una funzione $u(x, y)$ sia estremante. Sono di natura analoga alla condizione per una funzione reale di variabile reale dotata di un valore estremante in x_0 ed ivi derivabile che si esprime con $f'(x_0)=0$. Come questa condizione esse non sono in generale sufficienti. Questo risultato fu ottenuto assai presto, dei controesempi furono forniti da Legendre. Il problema della ricerca di condizioni sufficienti è assai arduo. Una prima soluzione fu data dallo stesso Legendre e successivamente migliorata da Jacobi, ma essa non resistette alla critica che ne fece Weierstrass. Il criticismo di Weierstrass mise in luce la vera difficoltà del problema, cioè come una curva «vicinissima ad un'altra» potesse tuttavia provocare notevoli variazioni nell'integrale.

Verso la fine dell'Ottocento si sviluppò una notevole revisione critica del calcolo delle variazioni (come del resto di tutta l'analisi) e si evidenziarono nuove vie per affrontarne i problemi. L'approccio moderno è caratterizzato sostanzialmente dall'uso di metodi diretti.

Si osserverà come l'equazione di Eulero non affronti direttamente il problema della ricerca di una curva estremante ma piuttosto come «scarichi» questo problema in uno di equazioni differenziali. Qui si espliciterà invece brevemente quale sia l'idea informatrice del cosiddetto metodo diretto. Ad esso sono legati, tra gli altri, i nomi di Ritz, Galerkin e Tonelli. Si suppone assegnato un funzionale $\mathcal{J}(y(x))$ definito sopra una certa classe C di funzioni. Al variare di y in C si avrà una certa classe di numeri la quale sarà dotata di un estremo inferiore d. Può darsi che non vi sia alcuna funzione in C che realizza il valore d, ma tuttavia per la definizione stessa di estremo inferiore è

possibile trovare una successione y_n tale che $\mathcal{J}(y_n)$ abbia come limite d al crescere di n. Una tale successione viene detta successione minimale. Il successo del metodo si fonderà ora sulla possibilità di trovare una successione minimale tale che passando al limite si ottenga la soluzione richiesta. Questo è il fondamento del metodo di Ritz, applicato successivamente da Galerkin anche in situazioni diverse da quelle del calcolo delle variazioni (1908, 1915). Si deve poi a Tonelli l'aver messo in luce il ruolo fondamentale della semicontinuità dell'integrale che si considera per il successo dei metodi diretti.

3.3. Equazioni di Lagrange e di Hamilton.

Le equazioni di movimento di Lagrange furono ottenute esprimendo in forma concreta il principio di minima azione, all'interno del calcolo delle variazioni. Egli espresse il principio dicendo che il prodotto della massa, della velocità e della distanza prese tra due punti fissi debbono essere massimi o minimi. Si tratta in altre parole di considerare i valori estremanti dell'integrale $\int mv\, ds$ oppure, osservando come $ds = v\, dt$, dell'integrale $\int mv^2\, dt$.

Per ricavare da queste considerazioni le equazioni di movimento, Lagrange introdusse le coordinate generalizzate. Per spiegare cosa siano le coordinate generalizzate di un sistema meccanico, si considera l'esempio semplice di una particella nello spazio. La sua posizione può essere espressa utilizzando le coordinate rettangolari, come nella figura 12*a*. Tuttavia, può essere piú conveniente esprimere la sua posizione mediante le coordinate cilindriche, ossia come nella figura 12*b*), o anche mediante un qualunque altro sistema di coordinate. Cosí è possibile associare alla particella tre numeri i quali ne esprimano la posizione secondo certe convenzioni fissate. Se ad esempio, invece, si considera una sbarra rigida mobile nel piano, la si può pensare formata da due particelle rigidamente connesse A, B, come nella figura 13*a*, con le coordinate che esprimono la posizione di A in riferimento cartesiano e l'angolo che la sbarra forma rispetto a uno degli assi (fig. 13*b*). In generale, dato un sistema meccanico, ad esso si associeranno n coordinate generalizzate.

Gli elementi meccanici considerati da Lagrange per ricavare le sue equazioni, sono ora:

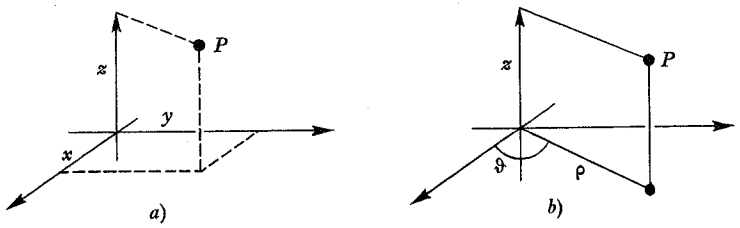


Figura 12.
Coordinate del punto P: cartesiane in *a*), cilindriche in *b*).

1) l'energia cinetica T. Nel caso di una singola particella questa è espressa, se la particella è rappresentata con le coordinate cartesiane x, y, z, da $T = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2$. Per n particelle indipendenti, l'energia cinetica sarà la somma delle energie cinetiche. Per un sistema meccanico piú complesso essa sarà calcolabile ancora in termini delle coordinate $q_1, q_2, \ldots, q_n$ e delle relative derivate $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$;
2) l'energia potenziale $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ mediante le cui derivate si possono esprimere le forze agenti.

L'ipotesi ulteriore posta da Lagrange è che $T + V = \text{cost}$. L'azione lagrangiana da considerarsi è ora $\int_{x_0}^{x_1} T\, dt$. Imponendo che questo funzionale abbia la prima variazione nulla, si ottengono infine le equazioni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0.$$

Si ha dunque un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine che descrive il movimento del sistema. Le coordinate q_i possono non avere, come si è osservato, un significato fisico o geometrico immediato. Oggi si parla di esse come di coordinate nello spazio delle configurazioni. Le coordinate $q_i(t)$ descrivono in questo spazio una certa curva.

Le equazioni di Lagrange sono dedotte all'interno della dinamica newtoniana e in effetti sono equivalenti alle equazioni che si ottengono dalla seconda legge della dinamica di Newton. Hanno però rispetto alla formulazione di Newton numerosi vantaggi. Intanto sono formulabili in un qualsiasi sistema di coordinate e sono invarianti in forma rispetto ai cambiamenti di coordinate. Soprattutto però hanno il vantaggio di essere ottenute a partire da un unico principio e forniscono dunque un aspetto unitario alla trattazione dei fenomeni meccanici.

E ora le equazioni di Hamilton. Come si è già osservato all'inizio del paragrafo, anche se dal punto di vista formale non vi è una grande differenza tra i due punti di vista, vi è però una differenza sostanziale dal punto di vista filosofico.

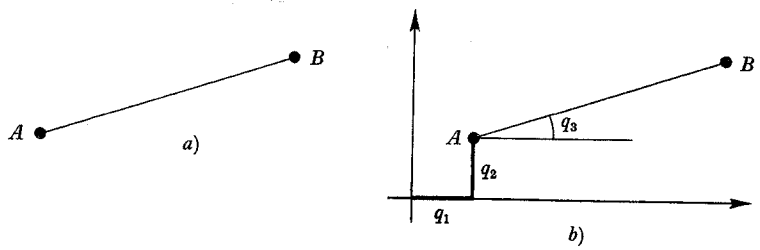


Figura 13.
Sbarra idealizzata con due particelle A, B connesse rigidamente (*a*) e sue coordinate generali (*b*).

Infatti per Hamilton un principio variazionale non riflette una necessità cosmologica, ma è un modo comodo per raggruppare unitariamente molti fenomeni.

L'azione considerata da Hamilton è

$$S=\int_{P_1,\,t_1}^{P_2,\,t_2}(T-V)\,dt,$$

ove però si consente di paragonare cammini che non hanno alcuna restrizione eccetto quella che il moto lungo di essi inizia all'istante t_1 nella posizione P_1 e termina nel punto P_2 all'istante t_2. Il principio di Hamilton consiste nell'affermare che il moto attuale è quello che rende l'azione stazionaria. Ponendo $L=T-V$ e considerando la prima variazione, si ottengono cosí le equazioni

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=0.$$

Queste, nel caso che, come nell'ipotesi di Lagrange, sia $T+V=\text{cost}$, si riducono alle equazioni di Lagrange, ma possono formularsi, piú in generale, anche per sistemi non-conservativi.

Alle equazioni di Hamilton si può dare anche un'altra forma molto interessante. Posto infatti

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

tenendo conto delle equazioni precedenti

$$\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Se ora si considera la funzione

$$H(p_i,q_i,t)=-L+\sum p_i\dot{q}_i$$

cioè, dal punto di vista fisico, l'energia totale, si ottiene il sistema

$$\begin{cases}\dot{q}_i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\\[2ex] \dot{p}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\end{cases}$$

il quale, considerato successivamente da Jacobi, fu denominato sistema differenziale canonico. Si può mostrare come questo sistema sia ottenibile, ancora in maniera variazionale, considerando l'integrale

$$S=\int\left(\sum p_i\dot{q}_i-H\right)dt.$$

Il lavoro di Hamilton, e quello successivo di Jacobi intorno alla risolvibilità del sistema, sono molto importanti sia intrinsecamente, sia perché segnarono la via per la ricerca di altre formulazioni variazionali nell'ambito di altre teorie fisiche come l'elettromagnetismo e la teoria dei quanti.

4. *Forme differenziali.*

4.1. Teoria locale.

Si considererà dapprima il caso degli aperti di $\mathbf{R}^n$. Nel paragrafo successivo si estenderanno le considerazioni al caso delle varietà differenziabili (per cui si veda l'articolo «curve/superfici» della presente *Enciclopedia*). Sia E uno spazio vettoriale di dimensione n, e si consideri accanto ad esso la sua «algebra esterna» ΛE, costruita come somma diretta delle potenze esterne p-esime $\Lambda^p E$. In altre parole, si ponga

$$\Lambda E=\bigoplus_{p=0}^{n}\Lambda^p E.$$

La potenza esterna p-esima è costruita introducendo n simboli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ e un'operazione di prodotto esterno $\wedge$ per la quale si richiedono le proprietà

$$(1)\qquad \begin{aligned}&\xi_i\wedge\xi_i=0\\ &\xi_i\wedge\xi_j=-\xi_j\wedge\xi_i\\ &(\xi_i\wedge\xi_j)\wedge\xi_k=\xi_i\wedge(\xi_j\wedge\xi_k).\end{aligned}$$

Accanto ai simboli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ si considerano poi i monomi del tipo $\xi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{i_k}$ e le espressioni con coefficienti in E della forma

$$\sum a_{i_1\cdots i_k}\xi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{i_k}.$$

Per queste espressioni si pongono poi delle regole di calcolo per la somma e il prodotto, comportandosi sostanzialmente come se si avesse a che fare con polinomi nelle indeterminate $\xi_1, \ldots, \xi_n$, ma badando naturalmente a rispettare le proprietà (1). Un esempio chiarirà completamente questo modo di procedere.

$$\begin{aligned}(a\xi_1+b\xi_2+c\xi_3)\wedge(d\xi_1+e\xi_2)&=ad\,\cancel{\xi_1\wedge\xi_1}+bd\,\xi_2\wedge\xi_1+cd\,\xi_3\wedge\xi_1+\\ &\quad+ae\,\xi_1\wedge\xi_2+be\,\cancel{\xi_2\wedge\xi_2}+ce\,\xi_3\wedge\xi_2=\\ &=(-bd+ae)\,\xi_1\wedge\xi_2+cd\,\xi_3\wedge\xi_1+ce\,\xi_3\wedge\xi_2=\\ &=(ae-bd)\,\xi_1\wedge\xi_2-cd\,\xi_1\wedge\xi_3-ce\,\xi_2\wedge\xi_3.\end{aligned}$$

Si osserva, nel procedimento, come in accordo con le (1) il termine $ad\,\xi_1\wedge\xi_1$ sia stato posto uguale a zero e come si siano raggruppati i due termini $bd\,\xi_2\wedge\xi_1$, $ae\,\xi_1\wedge\xi_2$ aventi lo stesso monomio (naturalmente per fare questo calcolo abbiamo assunte implicitamente molte regole, quali $(ad)\,0=0$, ecc. Queste regole sono molto semplici e corrispondono perfettamente all'intuizione che uno si fa del calcolo [per una trattazione formale molto rigorosa cfr. Schwartz 1967].

Si consideri ora un aperto Ω di $\mathbf{R}^n$ e lo spazio $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ delle funzioni $f:\Omega\to\mathbf{R}$ che siano indefinitamente differenziabili. È ora possibile costruire l'algebra esterna di questo spazio. Per rendere piú intuitivo lo sviluppo di quanto segue è opportuno usare invece dei simboli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ i simboli $dx_1, \ldots, dx_n$ (questa

notazione fa naturalmente pensare a dei differenziali e questa è la ragione di tale nomenclatura. Bisogna però essere molto attenti, per evitare fraintendimenti, a quando è lecito pensare i simboli $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ come differenziali e quando no [cfr. *ibid.*, p. 42]; la situazione è simile a quando si indica un integrale indefinito (nell'analisi elementare) con $\int f(x)\,dx$. Naturalmente il simbolo dx potrebbe essere omesso e potremmo scrivere $\int f(x)$. Però esso è certamente molto utile, se non altro per ricordare come si deve procedere quando si tenti di trovare una forma esplicita dell'integrale, operando delle sostituzioni di variabili).

Si indichino con $\mathfrak{E}^0(\Omega), \mathfrak{E}^1(\Omega), \ldots, \mathfrak{E}^n(\Omega)$ gli spazi vettoriali delle forme di grado $0, 1, \ldots, n$, rispettivamente, identificando $\mathfrak{E}^0(\Omega)$ con $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Si ha naturalmente che $\mathfrak{E}^{n+1}(\Omega)=0$, poiché necessariamente in una forma di grado $n+1$ vi dev'essere un dx_i ripetuto. Lo spazio vettoriale $\mathfrak{E}^p(\Omega)$ ha l'ulteriore struttura di $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ modulo. Come tale è un modulo di rango $\binom{n}{p}$. Ancora, si ponga

$$\mathfrak{E}(\Omega)=\bigoplus_{p=0}^{n}\mathfrak{E}^p(\Omega).$$

È ancora utile osservare che, date $\alpha_p\in\mathfrak{E}^p(\Omega)$, $\beta_q\in\mathfrak{E}^q(\Omega)$, allora $\alpha_p\wedge\beta_q\in\mathfrak{E}^{p+q}(\Omega)$ e $\alpha_p\wedge\beta_q=(-1)^{pq}\beta_q\wedge\alpha_p$. È ora possibile definire un'operazione di differenziale esterno $d^p : \mathfrak{E}^p(\Omega)\to\mathfrak{E}^{p+1}(\Omega)$ (quando non vi sarà luogo a fraintendimenti si ometterà l'apice p, $d : \mathfrak{E}^p(\Omega)\to\mathfrak{E}^{p+1}(\Omega)$). Quest'operazione può essere definita prima sulle forme monomie; se w^p è del tipo $w^p=a(x)\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}$, allora si pone

$$dw^p=da(x)\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}=\sum_j\frac{\partial a(x)}{\partial x_j}\,dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}.$$

Per una forma qualsiasi si estende per linearità la definizione. In particolare, per una forma di grado zero, cioè per una funzione, il differenziale esterno viene a coincidere con il differenziale ordinario. La piú importante proprietà del differenziale esterno è data dal seguente

TEOREMA. *Siano*

$$d^{p-1} : \mathfrak{E}^{p-1}(\Omega)\to\mathfrak{E}^p(\Omega)$$
$$d^p : \mathfrak{E}^p(\Omega)\to\mathfrak{E}^{p+1}(\Omega)$$

allora $d^p\circ d^{p-1}=0$.

Dimostrazione: Basta osservare come questa proprietà sia vera per le forme monomie. Si ha infatti:

$$ddw^p=d\left(\sum\frac{\partial a}{\partial x_j}\,dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}\right)=\sum\frac{\partial^2 a}{\partial x_k\,\partial x_j}\,dx_k\wedge dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}=0$$

poiché

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_k\,\partial x_j}=\frac{\partial^2 a}{\partial x_j\,\partial x_k}.$$

Poiché una forma qualsiasi è formata dalla somma di forme monomie, ne segue la tesi.

Questo teorema ci permette di costruire la successione di moduli e di omomorfismi:

$$0\to\mathfrak{E}^0(\Omega)\xrightarrow{d}\mathfrak{E}^1(\Omega)\xrightarrow{d}\mathfrak{E}^2(\Omega)\to\ldots\to\mathfrak{E}^n(\Omega)\to 0$$

la quale è una successione nulla, cioè componendo due omomorfismi successivi si ottiene il morfismo nullo. Ora, il fatto che $d^p\circ d^{p-1}=0$ significa che se si considerano i due sottomoduli di $\mathfrak{E}^p(\Omega)$ dati dal «nucleo» di d^p ($\operatorname{Ker} d^p$) e dall'«immagine» di d^{p-1} ($\operatorname{Im} d^{p-1}$) cosí definiti:

$$\operatorname{Ker} d^p=\{x\in\mathfrak{E}^p(\Omega):\ d^p(x)=0 \text{ in } \mathfrak{E}^{p+1}(\Omega)\}$$
$$\operatorname{Im} d^{p-1}=\{y\in\mathfrak{E}^p(\Omega):\ \text{esiste un } x'\in\mathfrak{E}^{p-1}(\Omega) \text{ con } d^{p-1}(x')=y\}$$

si ha $\operatorname{Im} d^{p-1}\subseteq\operatorname{Ker} d^p$. Questo autorizza a considerare

$$H^p(\Omega)=\frac{\operatorname{Ker} d^p}{\operatorname{Im} d^{p-1}}$$

il p-esimo gruppo di coomologia di De Rham.

In termini intuitivi, si può dire che il p-esimo gruppo di coomologia di De Rham misura la differenza tra il nucleo dell'omomorfismo d^p e l'immagine dell'omomorfismo d^{p-1}. In genere si usa chiamare chiuse le p-forme w^p per le quali $d^p(w^p)=0$, mentre si dicono esatte le forme di grado p che sono ottenute da quelle di grado $p-1$ applicando d^{p-1}. Il teorema precedente si può rienunciare dicendo che ogni forma esatta è chiusa. Il p-esimo gruppo di coomologia misura dunque quante sono le forme chiuse che non sono esatte.

Prima di procedere è bene studiare qualche esempio, considerando per semplicità $\Omega=\mathbf{R}^3$. Si consideri una forma w^0 di grado 0; essa è semplicemente una funzione di tre variabili $f(x, y, z)$. In tal caso si ha $dw^0=df=\operatorname{grad} f$.

Si consideri ora una forma differenziale di grado 1; essa può scriversi $w^1=a\,dx+b\,dy+c\,dz$ e si ha in tal caso:

$$dw^1=\left(\frac{\partial a}{\partial x}\,dx+\frac{\partial a}{\partial y}\,dy+\frac{\partial a}{\partial z}\,dz\right)\wedge dx+\left(\frac{\partial b}{\partial x}\,dx+\frac{\partial b}{\partial y}\,dy+\frac{\partial b}{\partial z}\,dz\right)\wedge dy+$$
$$+\left(\frac{\partial c}{\partial x}\,dx+\frac{\partial c}{\partial y}\,dy+\frac{\partial c}{\partial z}\,dz\right)\wedge dz=$$
$$=\left(-\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial b}{\partial x}\right)dx\wedge dy+\left(-\frac{\partial b}{\partial z}+\frac{\partial c}{\partial y}\right)dy\wedge dz+\left(-\frac{\partial a}{\partial z}+\frac{\partial c}{\partial x}\right)dx\wedge dz$$

e le quantità che compaiono a coefficiente di $dx\wedge dy$, $dy\wedge dz$, $dx\wedge dz$ sono le componenti del rotore del vettore $\mathbf{v}=(a, b, c)$.

Considerando invece $w^2=\alpha\,dy\wedge dz+\beta\,dz\wedge dx+\gamma\,dx\wedge dy$, si ha

$$dw^2=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

cioè, considerando il vettore $\mathbf{v}=(\alpha, \beta, \gamma)$, il coefficiente di dw^2 è la divergenza di $\mathbf{v}$, $\operatorname{div}(\mathbf{v})$.

Con l'operazione di differenziazione esterna, si ottengono dunque gli operatori gradiente, rotore, divergenza della fisica matematica. Questo permette d'intuire come vi possa essere un profondo legame tra i fenomeni descritti dalla fisica matematica e le forme differenziali. Poiché, come si vedrà, le forme differenziali sono profondamente connesse alla topologia algebrica, si capisce come si possa portare avanti la tesi di un'unità profonda tra la topologia algebrica e la fisica matematica [cfr. Tonti 1972].

Un importante risultato di Poincaré chiarisce, in un caso importante, il rapporto tra forme chiuse e forme esatte.

LEMMA (Poincaré). *Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ convesso e connesso. Allora ogni forma chiusa in Ω è esatta in Ω.*

Di questo teorema si può dare una seconda forma, piú «algebrica». Ogni numero reale può essere considerato come una particolare funzione, la funzione costante, che assume sempre il valore indicato dal numero. È allora possibile considerare l'inclusione $\mathbf{R} \subset \mathcal{E}^0(\Omega)$ e conseguentemente il complesso «aumentato»

$$0 \to \mathbf{R} \to \mathcal{E}^0(\Omega) \to \mathcal{E}^1(\Omega) \to \ldots \to \mathcal{E}^n(\Omega) \to 0.$$

Allora si può enunciare la seconda forma del lemma:

LEMMA. *Il complesso $0 \to \mathbf{R} \to \mathcal{E}^0(\Omega) \to \mathcal{E}^1(\Omega) \to \ldots \to \mathcal{E}^n(\Omega) \to 0$ è esatto.*

Il significato di questo lemma può riesprimersi dicendo che in questo caso tutti i gruppi di coomologia di De Rham sono uguali a zero. Questo risultato suggerisce come vi debba essere un legame tra la coomologia di De Rham e la maggiore o minore semplicità dello spazio topologico (in questo caso Ω) ove vengono definite le forme differenziali. In effetti il teorema di De Rham che si vedrà nel paragrafo successivo sarà proprio un risultato in questo senso.

A conclusione del paragrafo si osservi che le ipotesi nelle quali è stato enunciato il lemma sono certamente troppo forti. Tuttavia, il fatto che siano necessarie delle restrizioni è chiarito dal comportamento della forma differenziale

$$w=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

definita su $\mathbf{R}^2-\{(0, 0)\}$. Questa forma differenziale è tale che $dw=0$, e però non esiste alcuna w' tale che $dw'=w$.

4.2. Forme differenziali su una varietà differenziabile.

Si vedrà ora come la struttura delle forme differenziali fin qui considerate su aperti di $\mathbf{R}^n$ possa trasferirsi su una varietà differenziabile. Si consideri dunque una varietà differenziabile X di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione n. Ciò significa che X, che si suppone essere uno spazio topologico separato, a base

numerabile, è pensabile localmente come lo spazio euclideo $\mathbf{R}^n$. Piú esattamente, per ogni punto p di X sono assegnati un aperto U_α e un omeomorfismo $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$, in modo che $\varphi_\alpha(p)=(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ può essere immaginata come una n-upla di coordinate di p. Può succedere tuttavia che p appartenga anche a un altro aperto U_β, in modo che a p si possano anche assegnare le coordinate $\varphi_\beta(p)=(x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_n^\beta)$. Occorre naturalmente che questi due sistemi di coordinate siano compatibili; in altre parole che $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$, che dà il passaggio dall'uno all'altro sistema, sia un $\mathcal{C}^\infty$-isomorfismo.

In generale, si chiederà dunque che se U_α e U_β sono due aperti con intersezione non vuota, si abbia, nella situazione illustrata dalla figura 14, che $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ sia un $\mathcal{C}^\infty$-isomorfismo. Poiché per ogni p sono assegnati un aperto U_α e un omeomorfismo $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}^n$, si ha che gli aperti U_α sono un ricoprimento di X, cioè $\cup U_\alpha = X$. Gli omeomorfismi φ_α permettono di pensare su U_α la struttura di $\mathbf{R}^n$: le funzioni differenziabili, i vettori tangenti, le forme differenziali, ecc. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ su $U_\alpha \cap U_\beta$ agiscono però sia φ_α che φ_β e si hanno dunque *due* modi di trasportare la struttura di $\mathbf{R}^n$. Tuttavia, la richiesta che $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ sia un $\mathcal{C}^\infty$-isomorfismo fa sí che questi modi siano compatibili. Per riassumere la situazione si ha dunque sulla varietà X localmente, cioè su ogni aperto U_α, la struttura di $\mathbf{R}^n$ e delle condizioni di compatibilità globale.

Queste strutture definite localmente e compatibili globalmente possono essere analizzate piú in dettaglio e il risultato dell'analisi è la definizione di fascio di funzioni, di forme differenziali, ... sulla varietà. Il concetto di fascio, introdotto da Leray negli anni 1945-50 ed esposto per la prima volta appunto nei Seminaires Cartan del 1950, ha assunto nella matematica moderna un ruolo centrale. Qui ci si limiterà ad accennare in che senso le forme differenziali costituiscono un fascio sulla varietà X.

Se U_α è un aperto omeomorfo a $\mathbf{R}^n$, su U_α si hanno le forme differenziali $\mathcal{E}^p(U_\alpha)$ di grado p, semplicemente trasportando le forme di $\mathbf{R}^n$ di grado p; ancora esse formeranno un $\mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$-modulo, ove si indicano con $\mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$ le funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ definite su U_α. Se U è un aperto qualsiasi (non necessariamente del ricoprimento considerato) è chiaro come si possa considerare

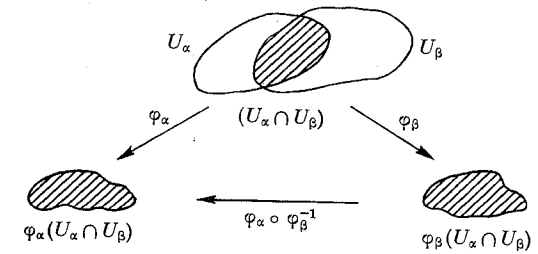


Figura 14.
Cambiamento di carta su una varietà differenziabile.

$\mathcal{E}^p(U)$, mediante le forme che definite localmente si possono estendere su tutto U. Ancora avremo che $\mathcal{E}^p(U)$ è un $\mathcal{C}^\infty(U)$-modulo. Se si considerano due aperti V, U con $V \subseteq U$ vi è un omomorfismo naturale $\mathcal{E}^p(U) \to \mathcal{E}^p(V)$; esso è dato dal «restringere» una forma definita su U a una definita su V. Si considera cioè la stessa forma ma definita semplicemente sull'aperto piú piccolo. Se si indica con α la forma considerata di $\mathcal{E}^p(U)$ il risultato della restrizione viene indicato con $\alpha|V$. La legge che ad ogni aperto U associa $\mathcal{E}^p(U)$, le forme differenziali definite su U, e ad ogni inclusione $V \subseteq U$ l'omomorfismo di restrizione $\mathcal{E}^p(U) \to \mathcal{E}^p(V)$ con $\alpha \mapsto \alpha|V$ ha le due proprietà:

1) se $V = U$ l'omomorfismo di restrizione è semplicemente l'identità $\alpha \mapsto \alpha|V = \alpha$;
2) se $W \subseteq V \subseteq U$ è la stessa cosa effettuare la restrizione direttamente oppure in due passaggi: $(\alpha|V)|W = \alpha|W$.

Tutto questo viene riassunto dicendo che $U \mapsto \mathcal{E}^p(U)$ costituisce un prefascio. Esso è in particolare un fascio, cioè verifica ulteriormente due condizioni:

3) se $\{U_i\}$, $i \in I$ è un ricoprimento di U, cioè $\cup U_i = U$ e se sono assegnati due elementi α, β di $\mathcal{E}^p(U)$ tali che $\alpha|U_i = \beta|U_i$ per ogni i allora $\alpha = \beta$;
4) se, ancora $\cup U_i = U$ ed è data una famiglia di elementi $\alpha_i \in \mathcal{E}^p(U_i)$ compatibile, cioè tale che per ogni coppia di indici i, j di I sia $\alpha_i|U_i \cap U_j = \alpha_j|U_i \cap U_j$, allora esiste un elemento α di $\mathcal{E}^p(U)$ con $\alpha|U_i = \alpha_i$.

Si ha dunque il fascio delle forme differenziali di grado p sulla varietà X e lo si indicherà globalmente con $\mathcal{E}^p$; e s'indicherà il suo «valore» su U con $\mathcal{E}^p(U)$ oppure con $\Gamma(U, \mathcal{E}^p)$. In particolare, le forme differenziali definite su tutta la varietà saranno denotate con $\Gamma(X, \mathcal{E}^p)$ (non è detto però che debbano esistere sulla varietà forme differenziali globali diverse da quella con i coefficienti identicamente nulli).

Il modo stesso con il quale sono state introdotte le definizioni di prefascio e di fascio suggerisce la maniera per estendere sulla varietà molte cose viste localmente. In particolare, su ogni U_α abbiamo il differenziale esterno

$$d_{U_\alpha} : \mathcal{E}^p(U_\alpha) \to \mathcal{E}^{p+1}(U_\alpha)$$

e questo può estendersi ad ogni U, in un omomorfismo

$$d_U : \mathcal{E}^p(U) \to \mathcal{E}^{p+1}(U).$$

Si verifica facilmente che, se $V \subseteq U$ si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^p(U) & \xrightarrow{d_U} & \mathcal{E}^{p+1}(U) \\ {\scriptstyle |V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |V} \\ \mathcal{E}^p(V) & \xrightarrow[d_V]{} & \mathcal{E}^{p+1}(V) \end{array}$$

cioè un «omomorfismo globale» $d : \mathcal{E}^p \to \mathcal{E}^{p+1}$.

Per questo omomorfismo si ha ancora $d \circ d = 0$ (il che significa che localmente

vale questa proprietà). Ne consegue che si può ancora considerare il complesso

$$0 \to \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n \xrightarrow{d} 0$$

e introducendo ancora $\mathbf{R}$, inteso però questa volta come le funzioni costanti sulla varietà, il complesso

$$(1) \qquad 0 \to \mathbf{R} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n \xrightarrow{d} 0.$$

Per ricavare ancora l'esattezza di questo complesso (l'esattezza localmente) occorre disporre nuovamente del lemma di Poincaré. Per questo occorre tuttavia fare delle ipotesi sulla struttura topologica di X. Infatti, la tecnica con la quale si dimostra il lemma di Poincaré richiede la possibilità di disporre dell'integrazione sulla varietà. Mediante un procedimento che coinvolge in maniera essenziale l'integrazione, si risale infatti, nel caso considerato in precedenza, da una forma α ad una α' tale che $d\alpha' = \alpha$. Il dispositivo tecnico mediante il quale si può effettuare l'integrazione sulla varietà è dato dalle partizioni della unità, o partizioni di Dieudonné, le quali appunto richiedono delle ipotesi sulla topologia di X. Per esempio si può supporre che X sia uno spazio topologico paracompatto. In tale ipotesi si può dimostrare come il complesso (1) sia esatto. Accanto al complesso (1) si può ora considerare il complesso delle sezioni globali

$$0 \to \Gamma(X, \mathbf{R}) \to \Gamma(X, \mathcal{E}^0) \to \Gamma(X, \mathcal{E}^1) \to \dots \to \Gamma(X, \mathcal{E}^n) \to 0$$

che viene anche detto complesso di De Rham. È essenziale il fatto che questo complesso, in generale, non è piú un complesso esatto. Questo fatto dà origine ad una coomologia, la coomologia di De Rham. Si può cioè considerare il p-esimo gruppo di coomologia di De Rham definito da

$$H^p_{\mathrm{DR}}(X) = \frac{\operatorname{Ker} d : \Gamma(X, \mathcal{E}^p) \to \Gamma(X, \mathcal{E}^{p+1})}{\operatorname{Im} d : \Gamma(X, \mathcal{E}^{p-1}) \to \Gamma(X, \mathcal{E}^p)}.$$

In particolare X, essendo una varietà topologica paracompatta, ammetterà anche una coomologia a valori in un fascio e ancora piú in particolare quindi una coomologia a coefficienti reali. Avremo quindi, per ogni p, il p-esimo gruppo di coomologia a valori reali $H^p(X, \mathbf{R})$. Il risultato fondamentale che ora si è in grado d'enunciare è il seguente

TEOREMA (De Rham). *I gruppi di coomologia costruiti con le forme differenziabili $H^p_{\mathrm{DR}}(X)$ ed i gruppi di coomologia a coefficienti reali $H^p(X, \mathbf{R})$ sono isomorfi.*

Questo risultato, della massima importanza, ottenuto da De Rham intorno al 1930, mostra come la struttura differenziabile di X, mediante il calcolo dei gruppi di coomologia di De Rham, permetta di caratterizzare la struttura topologica; almeno quella parte della struttura topologica che è definibile in termini di coomologia. [M. G.].

Birkhoff, G., e Kellog, A.
1922 *Invariant points in function space*, in «Transactions of the American Mathematical Society», XXIII.

Bombieri, E.
1974 *Variational Problems and Elliptic Equations*, in R. D. James (a cura di), *Proceedings of the International Congress of Mathematics*, Canadian Mathematical Congress, Vancouver.

Cartan, E.
1899 *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff*, in «Annales de l'Ecole Normale», serie III, vol. XVI; ora in *Œuvres*, vol. I, Gauthier-Villars, Paris 1952.

Coddington, E. A., e Levinson, N.
1955 *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York.

Eulero, L.
1770 *Institutionum calculi integralis*, vol. III, Accademia Imperiale delle Scienze, Petersburg.

Forsyth, A. R.
1890 *Theory of Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge.

Giusti, E., e Miranda, M.
1968 *Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni*, in «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», serie IV, I, 2, pp. 219-26.

Goursat, E.
1922 *Leçons sur le problème de Pfaff*, Hermann, Paris.

Hadamard, J.
1924 *Principe de Huygens et prolongement analytique*, in «Bulletin de la Société Mathématique de France», LII, pp. 311-49.

Hegel, G. W. F.
1830 *Encyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse*, Oswald, Heidelberg 1830³ (trad. it. Laterza, Bari 1975).
1835 *Vermischte Schriften*, in *Werke*, vol. XVII, Duncker und Humblot, Berlin und Leipzig (trad. it. in *Lettere*, Laterza, Bari 1972).

Lagrange, L.
1760-61 *Essai d'une nouvelle méthode pour determiner les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, in «Miscellanea Taurinensia», II; ora in *Œuvres*, vol. I, Gauthier-Villars, Paris 1867, pp. 333-62.

Laplace, P.-S.
1814 *Essai philosophique sur les probabilités*, in *Théorie analytique des probabilités*, Courcier, Paris 1814² (trad. it. in *Opere*, Utet, Torino 1967, pp. 241-404).

Lusternik, L. A., e Sobolev, S. L.
1961 *Elements of Functional Analysis*, Hindustan Publishing Corp., Delhi.

Poincaré, H.
1881 *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, in «Journal de Mathématique», serie III, VII; ora in *Œuvres*, vol. I, Gauthier-Villars, Paris 1928.
[1901] *Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré, faite par lui-même*, in «Acta Mathematica», XXXVIII (1921), pp. 1-135; ora in *Œuvres*, vol. I, Gauthier-Villars, Paris 1928.

Petrovskij, I. G.
1953 *Lekcii ob uravneniach s častnymi proizvodnymi*, Gosudarstvennoe isdatel'stvo techniko-teoretičeskoj literatury, Moskva 1953²; ed. ingl. *Lectures on Partial Differential Equations*, Interscience, New York 1954.

Schwartz, L.
1967 *Cours d'analyse*, vol. II, Hermann, Paris.

Tonti, E.
1972 *On the mathematical structure of a large class of physical theories*, in «Rendiconti della classe di scienze fisiche matematiche naturali dell'Accademia dei Lincei», gennaio.

Tricomi, F. G.
1961 *Equazioni differenziali*, Boringhieri, Torino.

Equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali sono presenti fin nei primi problemi del calcolo **infinitesimale** relativi al **moto** dei corpi materiali, degli astri (cfr. **astronomia, stabilità/instabilità**), a fenomeni di **propagazione** (cfr. **suono/rumore**), quali il problema della corda vibrante. Quest'ultimo in particolare ha grande importanza per lo sviluppo del concetto di funzione (cfr. **funzioni**). Anche i problemi relativi al calcolo delle variazioni (cfr. anche **variazione** e **calcolo**) si presentano con il sorgere del calcolo stesso, legandosi spesso a concezioni generali del **mondo** (cfr. **cosmologie**) o a problematiche filosofiche generali (cfr. **filosofia/filosofie**).

Con l'affermarsi dell'esigenza del rigore, i procedimenti differenziali divengono oggetto di una revisione critica che pone in luce l'importanza di concetti quali la continuità (cfr. **continuo/discreto**) e, parimenti, l'importanza dei teoremi d'esistenza, con la necessaria attenzione al punto di vista **locale/globale**. Le forme differenziali, definite su curve, superfici (cfr. **curve e superfici**) o piú in generale su varietà topologiche (cfr. **geometria/topologia**), pongono in luce importanti legami tra l'analisi ed altri settori della matematica (cfr. anche **invariante**). I problemi all'origine del calcolo differenziale si collegano strettamente al concetto di **approssimazione** da un lato, e al problema teorico dell'**infinito** dall'altro. Nel considerare questi problemi va posta in evidenza l'essenza **dialettica** dei cambiamenti dei punti di vista.

cui si

Funzione

1. *Il termine e le sue accezioni.*

Come spesso capita per i concetti utilizzati in vari campi di conoscenza, la nozione di funzione comprende accezioni piú o meno generali o specifiche a seconda delle discipline che la usano. I significati piú generali si riscontrano nelle scienze cosiddette esatte, soprattutto matematica, fisica e chimica, mentre la biologia e le scienze umane e sociali aggiungono al senso generale certe sfumature che derivano chiaramente da caratteri specifici degli oggetti che esse studiano. Passando, ad esempio, dal mondo inanimato a quello animato, si constata la progressiva introduzione di idee complementari che riguardano essenzialmente la nozione di finalità, o addirittura quella di intenzionalità. Questo spostamento di senso, oppure, se si preferisce, il suo arricchimento grazie all'addizione di nuove specificità, può essere facilmente constatato, come si vedrà ricapitolando ciò che la nozione di funzione rappresenta nelle diverse discipline.

In matematica, il concetto è associato alle situazioni in cui una grandezza, chiamata appunto «funzione», è determinata dal valore assunto da un'altra grandezza chiamata «variabile». Si tratta perciò di una relazione di dipendenza da parte di una grandezza nei confronti di un'altra, dipendenza che d'altronde si trasforma facilmente in interdipendenza grazie alla nozione di funzione inversa. Per generalizzazione, si passa in seguito alla nozione di funzione di piú variabili, poi a quella di funzione multivoca, per giungere all'idea generale di corrispondenza, ovvero di variazione concomitante di diverse grandezze. La nozione matematica di funzione consente cosí di descrivere il ruolo di questa o quella variabile, in un insieme di variabili legate tra di loro nel modo che è appunto precisato dalla funzione stessa.

Se si passa dalla matematica alle scienze della natura inanimata, il concetto di funzione rimane sostanzialmente inalterato. Per esempio, quando in chimica si parla della funzione acida o basica di un tipo di molecole, si tratta sempre di proprietà che queste molecole manifestano in un dato ambiente, cioè del ruolo che hanno nell'insieme che esse costituiscono unitamente a ciò che le circonda e che con esse interagisce.

Nel passaggio alle scienze della natura animata appare uno spostamento di senso, o, piú esattamente, un'aggiunta semantica che si va precisando man mano che ci si sposta verso le discipline che hanno come oggetto gli organismi piú evoluti e, soprattutto, nel caso delle relazioni fra tali organismi riuniti in società. La nozione di funzione tende, in questo caso, a non inglobare piú l'insieme delle proprietà manifestate dagli elementi considerati nell'ambiente in cui sono posti, bensí soltanto quelle che concorrono alla realizzazione di un dato obiettivo. Cosí, quando in biologia si parla della funzione fisiologica di un organo, se ne considerano soltanto le proprietà che gli consentono di

partecipare a certi aspetti, considerati essenziali, del funzionamento complessivo del sistema di cui è un costituente. Allo stesso modo, la funzione di un individuo in una società tiene conto soltanto del ruolo esercitato in vista della realizzazione di determinati obiettivi. Infine, per naturale estensione, l'uomo applica la stessa nozione agli oggetti che costruisce; per esempio, a proposito della funzione di un elemento di un meccanismo, oppure di questa o quella parte di un edificio in architettura.

Si noterà subito che il secondo senso del termine 'funzione', che si potrebbe definire come senso finalizzato, è in realtà una specificazione del primo senso, che è piú generale e non fa astrazione a priori da nessuna proprietà, da nessuno dei ruoli principali o secondari che un elemento può manifestare nell'insieme di cui fa parte. Qualsiasi analisi della nozione di funzione implica perciò, in primo luogo, un esame dettagliato del suo significato piú fondamentale, vale a dire di quello che appare *in statu nascendi* nelle procedure generali che si intraprendono per conoscere il mondo circostante; a questo esame sarà consacrato essenzialmente questo articolo.

È opportuno notare che lo studio delle funzioni finalizzate è impensabile se non si definisce in modo preciso la struttura del sistema inglobante, che condiziona gli stati verso i quali esso tende di conseguenza, cioè, ad essere precisi, la sua finalità. Per i sistemi molto complessi (biologici, ad esempio), oppure per quelli la cui lenta evoluzione è nota soltanto su lassi di tempo relativamente brevi (società umane, ad esempio), l'inventario esaustivo di tutti i fattori che intervengono in modo significativo nel loro comportamento è sempre un'operazione estremamente difficile e, in numerosi casi, probabilmente senza speranza allo stato attuale delle conoscenze. I tentativi che a questo scopo possono essere compiuti implicano spesso scelte piú o meno arbitrarie, o addirittura giudizi di valore, che comportano seri dubbi sulla validità e obiettività delle conclusioni cui si giunge. Perciò, includere nell'analisi della nozione generale di funzione certi aspetti che appartengono ai caratteri propri di questa o quella particolare funzione finalizzata sarebbe una fonte di confusione. Gli studi che si situano a questo livello non sono certo privi d'interesse, né d'importanza, ma trovano la loro vera collocazione solo quando si tenta d'applicare a sistemi particolari le considerazioni sviluppate a proposito della nozione generale di funzione.

È evidente, tuttavia, che lo studio della nozione generale di funzione non implica l'eliminazione di tutto ciò che riguarda l'ambientazione degli oggetti considerati. Certi caratteri generali di questo ambiente, e comunque la sua esistenza, dovranno evidentemente essere conservati, dal momento che diventerebbe impossibile parlare di funzione senza l'idea d'interazione. Saranno trascurati soltanto i caratteri specifici di particolari ambienti, in quanto non pertinenti all'analisi.

Si noti infine, per concludere questa introduzione, e a titolo di semplice suggerimento, che un altro studio di carattere generale meriterebbe senz'altro di essere fatto, come prolungamento di quello che qui sarà compiuto a proposito della nozione di funzione. Bisognerebbe effettuare un'analisi congiunta dei concetti di causalità e di finalità, alla luce di quanto potrebbe venire loro dallo studio della nozione di funzione. Infatti, quanto si è appena detto sul ruolo della specificità dell'ambiente negli aspetti finalizzati del comportamento degli elementi, lascia intravvedere una nuova possibilità di affrontare la famosa antinomia tra descrizione causale e descrizione finalistica dei fenomeni. Non è escluso che la necessità di ricorrere a spiegazioni finalistiche sia conseguenza nella maggior parte dei casi, dell'aver trascurato l'ambientazione dei sottosistemi studiati, e che una esplicitazione piú completa o piú adeguata dell'ambiente permetta di ritrovare l'ambito delle spiegazioni causali.

2. *Il problema della ricerca di funzioni elementari e della definizione di caratteristiche intrinseche di elementi.*

La funzione di un qualsiasi oggetto o elemento è strettamente legata al comportamento di tale elemento e al ruolo che esso svolge in un ambiente dato, il quale è, a sua volta, costituito da vari elementi. La nozione di funzione è quindi inseparabile da quella d'interazione e, di conseguenza, anche da quella di sistema; la sua esplicitazione può essere fatta solo a patto che intervengano, al tempo stesso, l'elemento considerato e gli altri elementi situati nell'ambiente. Come si è visto, parlare delle funzioni di un elemento non precisando affatto l'ambiente al quale esse si riferiscono è, a rigor di logica, un controsenso. Tale approssimazione diventa accettabile solo se si è già stabilito che le funzioni in questione si ritrovano in tutti i sistemi di cui l'elemento può far parte. Bisogna tuttavia temere che l'uso troppo frequente di questo linguaggio ellittico faccia dimenticare l'interdipendenza fondamentale che esiste tra le nozioni di funzione e di sistema. L'unica eccezione a questa regola corrisponde al caso degli elementi che si modificano indipendentemente dal loro ambiente, vale a dire ai mutamenti che possono essere spiegati a partire dalle sole caratteristiche intrinseche dell'elemento. Si potrebbe essere tentati di classificare questo comportamento sotto la voce «proprietà intrinseche» dell'elemento, sottolineando cosí una separazione dalla nozione di funzione. In definitiva, è tuttavia preferibile includere questo particolare comportamento nella nozione di funzione, e come caso limite, per le seguenti ragioni.

Una variazione spontanea di un elemento, cioè una variazione che dipende esclusivamente dalle sue caratteristiche intrinseche, fa effettivamente parte del suo comportamento. L'unico problema consiste nel sapere se questo elemento svolge un ruolo nei confronti degli altri elementi che costituiscono il suo ambiente ovvero, in altri termini, se l'elemento considerato e il suo ambiente costituiscono effettivamente un sistema. Invero, il fatto che un elemento subisca soltanto variazioni spontanee non consente di concludere che tale elemento e il suo ambiente sono indipendenti. Ciò significa soltanto che il comportamento dell'elemento non dipende dal suo ambiente, ma non per questo la relazione inversa è esclusa, e, in questo caso, è sempre possibile che l'elemento eserciti un ruolo nel comportamento del proprio ambiente. Un esem-

pio classico di tale situazione è dato dalle catene di filiazione, nelle quali i discendenti dipendono dagli ascendenti, senza reciprocità. Dal momento che l'esistenza di variazioni spontanee in un elemento non esclude a priori che esso svolga un ruolo nei confronti dell'ambiente, in definitiva è perfettamente logico includere le proprietà intrinseche nella nozione di funzione. Il caso in cui una variazione spontanea non si traduce in una funzione effettiva è cosí ricondotto alle proprietà dell'insieme degli elementi considerati, e dipende dal fatto che questi ultimi costituiscano o no un vero e proprio sistema.

Le funzioni di un elemento in un ambiente dato sono, in linea di principio, esprimibili a partire dalle caratteristiche intrinseche dell'elemento, dalle caratteristiche intrinseche degli elementi dell'ambiente, e da quelle che, non essendo attribuite in modo specifico ad alcun elemento, appaiono sotto forma estrinseca, cioè in quanto caratteristiche attribuite globalmente al sistema (nel caso di un campo, ad esempio). È tuttavia importante notare che, in realtà, lo studio della natura corrisponde anzitutto a una procedura in senso inverso. Si parte dall'osservazione delle interazioni, e di conseguenza delle funzioni, giungendo, per induzione, all'attribuzione di un certo numero di caratteristiche ad ogni elemento, cioè alla sua definizione. Si può addirittura affermare che, in una fase anteriore, dall'osservazione del mondo che ci circonda, dalle relazioni e dalle variazioni che vi scopriamo, già si forma a poco a poco la nozione stessa di elemento. Questa osservazione primordiale, che ci induce ad abbandonare la percezione indifferenziata, cioè quella di un tutto come elemento unico, si traduce in definitiva in due operazioni complementari, la prima analitica che corrisponde alla partizione in elementi, l'altra sintetica che rispetta l'interdipendenza delle parti sotto forma di relazioni tra gli elementi. La nozione di funzione corrisponde a una tappa essenziale della ricerca dei fattori che intervengono nelle relazioni tra elementi. Capita spesso che gli elementi di un sistema intervengano nelle relazioni che li concernono in forme molto diverse, cioè secondo processi che appaiono chiaramente differenti. Evidentemente, è interessante cercare di distinguere questi processi, e ricondurli a un numero il piú limitato possibile d'interazioni tipiche e irriducibili tra loro, ovvero mettere in evidenza, per l'appunto, *funzioni elementari*. Questa progressiva riduzione, di cui è evidente l'interesse per l'unificazione delle scienze, è già contenuta in nuce in ogni procedimento induttivo, nel quale si passi dall'osservazione delle relazioni tra elementi dell'attribuzione a questi ultimi di diverse caratteristiche intrinseche, come si vedrà tra poco.

La partizione in elementi e l'attribuzione di caratteristiche intrinseche a questi ultimi costituiscono quindi due operazioni strettamente correlate. Non appena si sceglie una partizione, l'osservazione delle relazioni tra elementi permette di estrarre a poco a poco un certo numero di funzioni elementari e di accedere cosí alle caratteristiche intrinseche. A due partizioni differenti possono corrispondere funzioni differenti. La scelta iniziale che sta alla base della partizione ha perciò una grande importanza. Essa può comportare conseguenze piú o meno felici sull'ulteriore sviluppo della teoria, relativamente alla sua estensione, semplicità o estetica. Non si può mai pretendere a priori che una

partizione scelta inizialmente si riveli la migliore in tutti i casi, e spesso si giunge a una scelta soddisfacente soltanto attraverso una serie di approssimazioni successive. Inoltre, è evidente che le partizioni possibili dipendono strettamente dal livello d'osservazione al quale ci si pone. I modelli teorici elaborati per la descrizione e la spiegazione dei fenomeni possono variare notevolmente a seconda di questo livello e, di conseguenza, anche a seconda della partizione scelta.

Il passaggio dall'osservazione delle relazioni tra elementi alla discriminazione in funzioni elementari è generalmente difficile, come lo è ogni procedimento induttivo. È ben raro che questo passaggio appaia subito evidente e univoco, e ciò è tanto piú vero quanto piú numerosi e diversi sono gli elementi in presenza. Si intuisce facilmente come questo problema debba essere affrontato in primo luogo sui sistemi piú semplici possibili, quelli cioè che comportano pochi elementi, simili o appartenenti a un ristrettissimo numero di tipi differenti. Inoltre, tale sistema deve poter essere considerato come isolato dal mondo esterno, perlomeno per tutto ciò che non è attinente alle interazioni in esame. La nostra conoscenza della natura si è sviluppata a poco a poco, operando appunto in questo modo, e si potrebbe addirittura dire che è proprio cercando di lavorare su partizioni del mondo, cioè su sistemi, i piú semplici possibili, che la fisica classica è giunta progressivamente a individuare le grandi funzioni elementari del mondo materiale che oggi conosciamo. Il sistema semplice costituito da un qualsiasi oggetto e dalla Terra, opportunamente isolato dalle interazioni parassite con l'eliminazione dell'atmosfera, ha consentito di studiare la funzione peso o gravitazione, e ha portato cosí alla nozione di massa come caratteristica intrinseca degli elementi. Analogamente, partendo dapprima da un sistema semplice a due elementi si è potuto mettere in evidenza la funzione d'interazione elettrica e, di conseguenza, la caratteristica intrinseca di carica elettrica. La stessa situazione si è ripresentata quando si sono dovute precisare a livello macroscopico le interazioni che prendono la forma di scambi di calore o di energia meccanica, e di definire correttamente le caratteristiche di capacità calorica e di temperatura. Evidentemente, si potrebbero citare molti altri esempi di questo tipo. Si constata sempre che la scienza riesce a studiare, solo procedendo molto gradualmente, sistemi piú complessi, nei quali intervengono simultaneamente piú funzioni elementari. I campi in cui il rigore appare piú difficilmente raggiungibile sono appunto quelli in cui non si riescono a realizzare condizioni che corrispondano all'intervento di una sola funzione elementare, oppure, al limite, di un piccolissimo numero di tali funzioni. È il caso, in particolare, di tutto ciò che riguarda il mondo vivente.

Ci si può chiedere come riconoscere in pratica che una sola funzione elementare interviene in un sistema. In realtà, non esiste alcuna risposta semplice a questa domanda. Si può, al massimo, enunciare un principio che costituisce piú una guida che una regola precisa. Si può affermare, in generale, che una funzione elementare tra due elementi darà luogo a una interazione esprimibile con una combinazione semplice di un piccolissimo numero di ca-

ratteristiche. Per esempio, nel caso di un sistema materiale, si è praticamente sicuri di avere a che fare con una funzione elementare quando le interazioni osservate sono esprimibili con una sola particolare caratteristica intrinseca e con caratteristiche relative alla situazione spaziale ed eventualmente al moto. Non si tratta affatto di un giudizio prematuro, dal momento che certe caratteristiche possono apparire indipendenti a un certo livello, mentre in realtà esiste tra loro una dipendenza, che emerge a un altro livello d'osservazione e comporta, di conseguenza, una riduzione del numero di caratteristiche necessarie. Cosí, le interazioni elettriche, che si esprimono semplicemente a partire dalla caratteristica di carica elettrica e dalle coordinate spaziali, appaiono proprio come l'espressione di una funzione elementare. Allo stesso modo, a livello macroscopico, si rende facilmente conto delle interazioni magnetiche a partire dalla nozione di massa magnetica e dalle coordinate spaziali, fatto che ha indotto a considerare questo tipo di interazione come elementare. Questa conclusione era certo legittima al livello d'osservazione scelto, anche se si è giunti in seguito a mostrare che la nozione di massa magnetica era riducibile a quella di carica elettrica associata alle caratteristiche del moto.

In definitiva, la parte piú difficile del procedimento induttivo consiste chiaramente nel mettere in evidenza le funzioni elementari a partire dall'osservazione delle relazioni tra elementi. Il passaggio della conoscenza di una funzione, riconosciuta come elementare, all'attribuzione di caratteristiche intrinseche costituisce una fase meno delicata, dal momento che si traduce, in molti casi, nell'enunciato di un predicato qualitativo unico, accompagnato eventualmente da caratteristiche quantitative proprie di ciascun elemento. In questa fase, la difficoltà specifica appare solo in seguito, quando ci si deve garantire l'indipendenza della nuova caratteristica intrinseca dalle caratteristiche già note, oppure, nel caso opposto, quando bisogna stabilire le vere e proprie relazioni di dipendenza. Questo problema in generale può essere risolto solo accedendo a un livello piú fine di descrizione, dal momento che, se si rimane allo stesso livello d'osservazione, molto spesso non si può far altro che stabilire relazioni empiriche e non esplicative.

È evidente che l'accesso alla conoscenza scientifica di un elemento unico, che si suppone totalmente isolato, è teoricamente da escludersi. Un elemento manifesta la sua presenza e le sue proprietà in modo duraturo o riproducibile soltanto grazie alle interazioni nelle quali interviene. Una sia pur minima conoscenza relativa a tale oggetto esige, evidentemente, che esso agisca in qualche modo su noi stessi, direttamente o attraverso strumenti d'osservazione da noi utilizzati. Questa condizione minimale *sine qua non* corrisponde alla situazione di un elemento semi-isolato, vale a dire che non riceve nulla dall'esterno ma che emette verso l'esterno vari segnali. L'elemento considerato si trova dunque in uno stato instabile e, se si ammette la validità generale della legge di conservazione dell'energia, si può affermare che questa situazione non durerà all'infinito. Le osservazioni che in questo caso si possono fare corrispondono perciò a fenomeni transitori. Esse consentono di accedere, almeno parzialmente, a una parte delle proprietà che l'elemento può manifestare, cioè

quelle particolari funzioni che qui sono state chiamate proprietà intrinseche. In termini generali, i fenomeni cosí osservati dipendono dalla storia precedente dell'elemento, e in particolare dallo stato in cui si trovava nel momento in cui è stato isolato da ogni azione proveniente dall'esterno. Facendo variare questa storia anteriore alle osservazioni, è possibile mettere in evidenza diversi aspetti delle proprietà intrinseche dell'elemento.

La situazione di semi-isolamento cui si accennava è in realtà piuttosto rara, soprattutto se la si considera in termini rigorosi. Nella stragrande maggioranza dei casi, gli elementi osservati partecipano a interazioni molteplici e diverse, alcune delle quali possono corrispondere a scambi nei due sensi con l'ambiente esterno. Di conseguenza, la ricerca delle funzioni elementari può talvolta diventare molto difficile. Lo scopo da raggiungere consiste sempre nel riuscire a isolare un fenomeno semplice, eliminando le interazioni parassite suscettibili di modificarlo e mostrando che le interazioni secondarie che sussistono non hanno alcuna influenza su di esso oppure sono trascurabili. Queste operazioni di discriminazione possono essere piú o meno complesse e delicate, non foss'altro, in primo luogo, perché la nozione stessa di fenomeno semplice richiede una valutazione che non è totalmente priva di soggettività, come si è visto. Molto spesso esse necessitano di un approccio per tentativi nel quale le conoscenze precedenti, le ipotesi e le verifiche sperimentali svolgono un ruolo importante. Capita beninteso che queste complesse procedure approdino rapidamente a situazioni semplici, e si capisce come il fatto di non ricercare una precisione troppo grande sia, da questo punto di vista, favorevole. A titolo d'esempio, si può citare lo studio della gravità attraverso l'osservazione della caduta di un grave in prossimità della Terra. Il sistema considerato obbedisce certamente al criterio di semplicità, come dev'essere ogni volta che si ricerca una funzione elementare, dal momento che è costituito da due elementi, la Terra e il grave di cui si studia la caduta. Ma, in pratica, e senza particolari precauzioni, il sistema reale è piú complicato, comportando anche l'atmosfera tra il grave e la Terra. Si tratta effettivamente, come dimostra l'esperienza, di un elemento parassita che deve essere eliminato, dal momento che perturba, a causa dei fenomeni d'attrito, l'interazione elementare che si vuole studiare. Per contro, le interazioni che hanno luogo tra gli elementi del sistema e la luce, e che sono obbligatoriamente implicate da una qualsiasi osservazione visiva degli elementi, appaiono come secondarie e senza influenza sul fenomeno di base studiato. Questo esempio, particolarmente semplice nella sua concezione, è stato scelto soltanto per illustrare le nozioni di fenomeno parassita e di fenomeno secondario. Le situazioni di questo tipo sono in realtà piuttosto eccezionali, e la ricerca delle funzioni elementari si presenta spesso in condizioni molto piú difficili.

Le difficoltà vere e proprie emergono quando si vuole rendere conto di osservazioni sempre piú precise. È allora frequente che un certo numero di fenomeni parassiti, che prima potevano essere trascurati, intervengano in modo significativo, rendendo sempre piú delicato l'isolamento di un solo fenomeno. D'altronde, si può affermare che, in generale, all'osservazione sempre piú pre-

cisa di un sistema corrisponde una diminuzione del numero di fenomeni che possono essere considerati come secondari, e un aumento del numero di fenomeni che devono essere considerati come parassiti. Tale situazione non presenta ostacoli insuperabili finché le interazioni si ripartiscono su una scala d'intensità abbastanza grande. La progressione dai livelli d'osservazione meno precisi a quelli piú precisi consente, in tale caso, di separe in fasi successive i diversi tipi d'interazioni e di valutare la loro importanza relativa. La nostra conoscenza della natura nei secoli passati è progredita essenzialmente in questo modo. Le difficoltà diventano piú serie quando piú tipi d'interazioni si manifestano contemporaneamente e con un'importanza dello stesso ordine. Se le conoscenze precedenti non consentono d'identificare a priori nel fenomeno globale la presenza simultanea di funzioni elementari, oppure se procedimenti sperimentali sempre piú raffinati non approdano alla separazione in fenomeni piú semplici, la ricerca delle funzioni elementari diventa evidentemente difficile. Capita cosí che ci si debba limitare a evidenziare funzioni relativamente complesse, o addirittura a una semplice fenomenologia globale degli effetti osservati. Si ritrova infine la stessa situazione quando è impossibile lavorare su sistemi sufficientemente semplici, sia che non si disponga di alcun mezzo d'azione, come in astronomia, sia che la separazione in sistemi semplici faccia scomparire certe funzioni essenziali, come in biologia. Se si vuole superare la mera descrizione dei fenomeni, l'unico approccio rimane, nel primo caso, l'elaborazione di ipotesi teoriche al livello delle funzioni elementari e la verifica della loro fondatezza attraverso le conseguenze che esse comportano per il sistema considerato nel suo insieme. Nel secondo caso, la separazione in sistemi piú semplici può sempre essere tentata, come avviene ad esempio in biologia molecolare, ma ci si deve aspettare che il progressivo ritorno al livello del sistema completo presenti serie difficoltà, in particolare per ritrovare l'origine delle funzioni che scompaiono al momento della separazione in sistemi semplici. Per evitare tali difficoltà, bisognerebbe poter realizzare uno studio molto minuzioso di tutti i possibili sistemi intermedi tra i livelli piú semplici e il livello globale, impresa che, nella maggior parte dei casi, è praticamente impossibile. L'elaborazione di ipotesi e di modelli teorici può evidentemente essere impiegata anche per tali sistemi, ma il rischio di gratuità cresce rapidamente man mano che aumenta la complessità del sistema. Il carattere ipotetico dei modelli teorici, in realtà, dipende molto dal livello di descrizione scelto, e il miglior mezzo per ridurre questo carattere ipotetico consiste nel collocare la partizione teorica del sistema al livello in cui gli elementi sono meglio conosciuti e differiscono il meno possibile relativamente alle caratteristiche qualitative che permettono di definirli.

Mettere in evidenza le funzioni elementari è insomma una fase essenziale tra la partizione in elementi e l'attribuire loro un certo numero di caratteristiche intrinseche. Le definizioni di elementi cosí ottenute per induzione sono perciò definizioni funzionali, le sole accessibili al metodo scientifico. Moltiplicando e diversificando lo studio dei sistemi in cui interviene un dato elemento, è possibile individuare a poco a poco, con questo processo induttivo,

un certo numero di caratteristiche intrinseche corrispondenti alle diverse funzioni elementari alle quali è suscettibile di partecipare l'elemento considerato. Se i sistemi studiati sono rappresentativi della diversità dei possibili sistemi in cui può intervenire l'elemento, la sintesi delle definizioni funzionali ottenute per ciascuno di essi consente di raggiungere una definizione universale dell'elemento stesso, o, perlomeno, una definizione valida per tutti i casi riscontrabili in pratica.

3. *Dal carattere locale degli elementi al carattere globale del sistema. Il residuo delle caratteristiche funzionali estrinseche.*

La ricerca delle caratteristiche significative di un sistema non sempre si conclude nella sola attribuzione di caratteristiche intrinseche agli elementi. In molti casi sussise ciò che, da questo punto di vista, si potrebbe chiamare un residuo, sotto forma di caratteristiche estrinseche, definibili soltanto al livello globale del sistema considerato o del suo ambiente. È raro infatti che si possa spingere la differenziazione di un sistema fino a eliminare ogni caratteristica sotto forma estrinseca. E ci si può chiedere se, in tali condizioni, la nozione di definizione universale di un elemento conservi un senso sufficientemente preciso. Tale definizione, infatti, dovrebbe contenere tutto ciò che è necessario a rendere conto del comportamento dell'elemento nelle piú diverse situazioni, il che esclude che certe caratteristiche appaiano esclusivamente sotto forma estrinseca. Per rispondere a questa domanda, bisogna anzitutto ricordare che i due tipi di caratteristiche corrispondono in realtà a due livelli differenti: le caratteristiche intrinseche al livello degli elementi, quelle estrinseche al livello del sistema. In secondo luogo, bisogna notare che una caratteristica può essere considerata come estrinseca per svariate e molto diverse ragioni.

Una prima ragione può essere che la caratteristica considerata corrisponda senza possibile ambiguità al livello del sistema; è il caso, per esempio, del numero totale di elementi contenuti nel sistema, indipendentemente dalla loro natura o dagli stati che essi occupano.

Una seconda ragione può essere che la caratteristica esprima un'azione esterna imposta al sistema; è il caso, per esempio, dell'azione di un campo esterno sul sistema oppure, piú generalmente, dell'azione di un qualsiasi elemento esterno non esplicitamente descritto. Si noterà subito che, in questo caso, è essenzialmente la scelta iniziale fatta per la partizione in elementi a permettere di tradurre l'azione considerata sotto forma di caratteristica estrinseca del sistema. L'unificazione del sistema inizialmente considerato e delle influenze esterne che esso subisce sarebbe sempre possibile e darebbe luogo a un nuovo sistema unico, con la riserva di un'adeguata modifica del numero e della definizione degli elementi costitutivi. Si ritrova qui, ancora una volta, il carattere molto relativo della definizione degli elementi e degli stati che possono occupare. La considerazione di tutti gli stati possibili, per interazioni molto diverse, è essenziale nella ricerca della definizione universale degli elementi.

Una terza ragione consiste nel fatto che una caratteristica può essere considerata estrinseca per motivi di comodità nello studio del sistema. In questo caso, essa può benissimo essere espressa, se necessario, sotto forma di caratteristica intrinseca degli elementi. È questo il caso, ad esempio, della temperatura, che è una caratteristica estrinseca, e della sua traduzione in termini di energia cinetica degli elementi, ossia in termini che corrispondono a caratteristiche intrinseche.

Una quarta ragione, infine, è che una caratteristica appaia come estrinseca senza che si sappia se corrisponde obbligatoriamente al livello del sistema oppure se è possibile tradurla sotto forma di caratteristiche intrinseche degli elementi. Questo era il caso della temperatura prima dell'affermazione della teoria cinetica del calore.

Gli ultimi tre casi hanno effettivamente un'incidenza diretta sulla definizione degli elementi, ma non intervengono allo stesso modo nella ricerca di una loro definizione universale. Il terzo caso, ad esempio, non presenta alcuna difficoltà, dal momento che è sempre possibile tradurre la caratteristica estrinseca considerata in termini di caratteristiche intrinseche degli elementi. Per contro, il quarto caso rappresenta un limite imposto dalla nostra ignoranza del significato profondo della caratteristica estrinseca. Dal momento che non si può affermare che questa caratteristica non è traducibile in termini intrinseci, non è possibile garantire che le definizioni adottate per gli elementi del sistema sono universali. Il secondo caso, infine, corrisponde a una situazione classica nella ricerca delle varie funzioni alle quali possono partecipare gli elementi, ed è direttamente legata alla partizione adottata nella prima fase dello studio. Nel nuovo sistema, ottenuto con l'unificazione del sistema considerato inizialmente e delle azioni esterne che esso subisce, il problema del significato delle caratteristiche estrinseche e della loro traducibilità in termini intrinseci ricalca una delle altre tre forme già citate.

In definitiva, si può dire che si è in presenza della definizione universale di un elemento quando le caratteristiche intrinseche contenute in tale definizione consentono, da sole oppure combinate con le caratteristiche degli altri elementi, di rendere conto dell'insieme delle funzioni alle quali può partecipare l'elemento nei vari sistemi in cui può essere incluso.

Le considerazioni precedenti consentono di fare un'ultima osservazione sul problema della definizione degli elementi e degli stati che sono suscettibili di occupare. Dato che le caratteristiche di cui bisogna tener conto possono essere molto differenti a seconda delle funzioni considerate, cioè a seconda dell'insieme degli elementi presenti, ci si può chiedere se non sia utile stabilire un certo numero di distinzioni tra i diversi tipi di caratteristiche, per esempio separando i loro aspetti qualitativi e quantitativi, suddividendo questi ultimi in gamme di possibili variazioni. Come si può facilmente notare, si tratta di un semplice problema di convenzione ma, come spesso capita, tale convenzione può essere utilissima per la chiara descrizione dei sistemi. In altri termini, è un problema di classificazione, analogo a quello che si pone in sistematica biologica, e che gli specialisti di questa disciplina risolvono utilizzando le nozioni di divisione, di classe, d'ordine, di famiglia, di genere e di specie. È certo possibile adottare distinzioni di questo tipo nella definizione di qualsiasi elemento, anche se soltanto quattro nozioni sembrano essere fondamentalmente utili. Si definiscano, per esempio, le seguenti categorie:

1) L'ordine, attraverso l'esistenza di un insieme dato di predicati qualitativi.
2) La famiglia, con gli stessi predicati qualitativi dell'ordine superiore, e con un certo numero di altri predicati qualitativi considerati secondari rispetto ai primi.
3) Il genere, con gli stessi predicati qualitativi della famiglia superiore, ognuno dei quali è qui accompagnato da una caratteristica quantitativa situata in una certa gamma piuttosto vasta di valori.
4) La specie (o stato), con gli stessi dati del genere superiore, ma qui ogni caratteristica quantitativa è situata in una sottogamma di valori piú ristretta rispetto al caso del genere, o addirittura corrispondente a un unico valore perfettamente definito.

Si noti fino a che punto la nozione di funzione sottende tale classificazione. Il passaggio dall'ordine alla famiglia introduce infatti una gerarchia di predicati qualitativi, cioè funzioni nelle quali intervengono questi predicati. Quelli che servono a definire l'ordine sono considerati di fondamentale importanza, mentre quelli che corrispondono alle varie famiglie di uno stesso ordine sono di secondaria importanza. D'altronde, la sistematica biologica utilizza un maggior numero di categorie proprio allo scopo di sfumare e di precisare questa gerarchia. Bisogna comunque evitare di spingersi troppo avanti su questa via che è legittima, ad essere rigorosi, solo se si conoscono perfettamente le relazioni esistenti fra tutti i predicati e tutte le funzioni nelle quali può intervenire l'elemento. Evidentemente, questo non è sempre vero, soprattutto quando gli elementi considerati sono complessi. Un predicato qualitativo può essere considerato secondario soltanto se è stato possibile garantirsi che la sua soppressione modifica in modo trascurabile l'insieme delle funzioni alle quali può partecipare l'elemento. Ma l'inventario esaustivo di tutte queste funzioni diventa sempre piú difficile man mano che cresce la complessità degli elementi. È perciò indispensabile, per qualsiasi classificazione che ammetta una gerarchia dei predicati qualitativi, precisare a quale insieme di funzioni essa si riferisce.

La relativa importanza delle diverse funzioni non dipende soltanto, generalmente, da un semplice giudizio qualitativo. È necessario tener conto anche dei valori numerici che ad esse sono collegati, e le distinzioni quantitative introdotte precedentemente nelle categorie genere e specie hanno appunto questo scopo. Queste suddivisioni permettono di distinguere elementi che, anche se definiti a partire dagli stessi predicati qualitativi, fanno praticamente parte di funzioni differenti, a causa delle grandezze delle caratteristiche quantitative che corrispondono a ognuno di essi. Nel caso di elementi dotati di massa e di carica elettrica, ad esempio, le funzioni d'interazione gravitazionale ed elettrica possono intervenire simultaneamente, perché i loro ordini di gran-

dezza sono raffrontabili, oppure, al contrario, ridursi praticamente a una di esse, se i valori delle caratteristiche quantitative rendono l'altra trascurabile. Queste suddivisioni quantitative, scarsamente utilizzate in sistematica biologica a causa della complessità degli elementi considerati, sono tuttavia di fondamentale importanza e dovrebbero quindi essere introdotte in ogni principio universale della classificazione.

In modo del tutto generale si può dire che la nozione di funzione si situa al tempo stesso all'origine e al termine di ogni procedimento scientifico. A partire dalla suddivisione in elementi e dall'osservazione delle funzioni d'interazione tra di essi, si giunge alla definizione degli elementi stessi. In seguito, con una teoria deduttiva, vale a dire che obbedisce a regole logiche, si cerca di prevedere quel sarà il comportamento di questi elementi in un sistema non ancora osservato sperimentalmente. Tutto questo processo, induttivo e deduttivo, appare quindi, in definitiva, come uno sforzo di generalizzazione e di sintesi delle nostre conoscenze al livello della nozione di funzione, fatto che sottolinea tutta l'importanza di quest'ultima.

4. *Funzione di un sistema in presenza di altri sistemi. Relazioni struttura-funzione. Verso la nozione di funzione finalizzata.*

Finora si è ammesso che gli elementi costitutivi di un sistema fossero esseri definiti, ciascuno globalmente, da un certo numero di caratteristiche che permettono di esprimere le loro diverse funzioni nel sistema. Ma, in realtà, un elemento qualsiasi può, a sua volta, essere un sistema. Questa situazione induce a esaminare come può essere tradotta la nozione di funzione applicata a un sistema, posto in presenza di altri sistemi che costituiscono il suo ambiente.

La trasposizione in questa nuova ottica delle considerazioni sviluppate precedentemente a proposito delle funzioni di elementi definiti, ciascuno, attraverso diverse caratteristiche globali, è un'impresa delicata che richiede un'analisi fine dei concetti utilizzati, e che non può essere dettagliatamente descritta in questo articolo. Qui non si farà altro che delinearne le fasi essenziali, riferendo comunque alcune delle difficoltà incontrate, e indicando le principali nozioni alle quali si giunge.

Quando gli elementi diventano sistemi, questi ultimi devono, per definizione, essere descritti in quanto tali, e non piú soltanto attaverso caratteristiche globali. Il primo problema che si pone allora è sapere quali dati pertinenti saranno utili a questa descrizione, in modo che possano effettivamente essere collegati alla nozione di funzione, pur rimanendo a un livello di generalità sufficiente per essere applicabili alle varie situazioni particolari.

Si approda, in questo modo, alla nozione di struttura, o piú esattamente a concetti precisi che si riferiscono a questa categoria di pensiero, associata successivamente a vari qualificativi, esprimenti aspetti diversi delle possibili interazioni o funzioni. Da un punto di vista generico, la nozione di struttura

riguarda la disposizione delle parti di un sistema, cioè il modo in cui i suoi elementi costitutivi interagiscono, si combinano, si scambiano, ecc.

Cosí, a seconda dei caratteri sui quali si fissa l'attenzione, è possibile definire diversi tipi di strutture, attraverso distinzioni che appaiono essenzialmente legate alla particolare rilevanza data ora agli aspetti dinamici dei sistemi, ora a quelli statici. È ovvio che la descrizione dinamica è la piú ricca, non foss'altro perché contiene l'altra come caso particolare, ma, evidentemente, è anche la piú delicata. La fonte principale delle difficoltà incontrate consiste nel fatto che l'adeguata descrizione dei sistemi varia, in generale, a seconda dell'importanza delle interazioni che esistono tra di essi, cioè a seconda del fatto che queste interazioni siano forti o deboli. Il problema esiste già per la determinazione delle caratteristiche degli elementi definiti globalmente, ma è evidentemente amplificato quando si tenta di ottenere una descrizione piú fine, e non soltanto globale. Le caratteristiche ottenute per induzione a partire dall'osservazione delle proprietà degli elementi, inclusi nei piú semplici sistemi possibili (condizione altamente auspicabile, come si è visto, per la determinazione di funzioni elementari), non rimangono necessariamente valide per lo studio dei sistemi piú complessi nei quali possono intervenire questi elementi. La difficoltà essenziale, in questo genere di estrapolazione, deriva dalle ipotesi che si è indotti a formulare relativamente al carattere variabile o invariabile delle caratteristiche utilizzate. Può capitare che alcune di esse, apparse come costanti nei sistemi semplici che sono serviti a determinarle, debbano, in realtà, essere considerate come variabili, qualora gli elementi in questione siano inseriti in altri sistemi. Che ci si situi al livello dei sistemi costituiti da elementi definiti globalmente, oppure a quello dei sistemi di sistemi, si ritrova lo stesso problema, ma fortemente accentuato nel secondo caso. Non è certo azzardato individuarvi uno dei problemi piú fondamentali e difficili della metodologia scientifica. Molti errori sono senza dubbio commessi in seguito a ipotesi difettose su questo punto, e forse soprattutto nella nostra epoca, in cui la scienza esplora sistemi sempre piú complessi per i quali il passaggio dalla dissezione analitica alla ricomposizione sintetica è sempre piú delicato.

Si può dire, infine, che tutto ciò che riguarda l'analisi delle nozioni di struttura, e di conseguenza le relazioni tra struttura e funzione, costituisce un passaggio obbligato per l'esame pertinente ed approfondito del concetto di «funzione finalizzata», lasciato da parte all'inizio di questo articolo, in quanto non appartenente «puramente» alla nozione fondamentale di funzione, bensí ad un complesso di nozioni. Infatti, dal momento che ogni struttura privilegia certi percorsi d'azione o d'evoluzione, è chiaro che ogni elemento in essa incluso eserciterà, in realtà, soltanto una parte delle funzioni di cui è potenzialmente capace. E si può anche prevedere che questo fenomeno di «direzionalità», presente in ogni comportamento finalizzato, sarà tanto piú marcato quanto piú complessa, o comunque specifica, sarà la struttura. Bisogna anche notare che è proprio l'introduzione degli aspetti dinamici ed evolutivi delle strutture a permettere di considerare i piú spettacolari processi finalizzati, ad esempio quelli che si incontrano in morfogenesi biologica, soprattutto in embriologia.

Tuttavia, al di là delle considerazioni generali che si potrebbero sviluppare in questa direzione, ogni funzione finalizzata richiede, proprio per la sua specificità, uno studio particolare che faccia intervenire i caratteri peculiari della struttura in cui si manifesta. Ne deriva che tale nozione è piú di competenza dell'esame di numerosi casi particolari che di un'analisi epistemologica generale.

5. *Il caso dei sistemi astratti. Dalla nozione di funzione alle nozioni di significato e d'informazione.*

Quanto precede è applicabile senza difficoltà ai sistemi materiali, per i quali le nozioni d'interazione e, di conseguenza, di funzione, appaiono naturali e suscettibili di una descrizione obiettiva. È interessante chiedersi che ne è di queste nozioni quando si cerca di applicarle a sistemi astratti a proposito dei quali, per definizione, non è piú possibile postulare un comportamento indipendente dalla mente che li concepisce.

L'obiezione che può essere rivolta a questa distinzione tra sistemi materiali e sistemi astratti deriva dalla constatazione che la nostra conoscenza di un qualsiasi sistema materiale fa sempre, e necessariamente, intervenire un sistema astratto, ovvero una rappresentazione adattata al nostro intendimento. Cosí, secondo questa obiezione, ogni conoscenza sarebbe riducibile, in ultima analisi, alle rappresentazioni astratte alle quali essa corrisponde nella nostra mente, sotto forma d'immagini e d'idee. È innegabile che ogni conoscenza ha effettivamente bisogno dell'intervento dei sistemi astratti del nostro intelletto. Ciò non significa tuttavia che il completo processo della conoscenza sia riducibile a questa fase, in tutti i casi e per tutti i tipi di sistemi che si presentano alla nostra comprensione. Esiste infatti una differenza essenziale tra i sistemi materiali e quelli astratti. I primi possono avere una spontaneità specifica, e certe loro interazioni possono verificarsi indipendentemente dall'intervento della nostra mente. La caduta di un corpo in un campo gravitazionale, oppure il moto dei pianeti nel sistema solare, sono fenomeni indipendenti dalla conoscenza che ne abbiamo. I sistemi astratti invece non possiedono una loro specifica spontaneità, e le interazioni che possono avvenire tra di essi richiedono necessariamente l'intervento della mente. Due sistemi di parole, ognuno dei quali costituisca una frase, potranno interagire soltanto nel processo cognitivo, cioè grazie all'intervento della mente che, in questo caso, svolge il ruolo di terzo sistema obbligatorio. Per riconoscere questa differenza essenziale tra i due tipi di sistemi, non è necessario entrare nei paradossi della *querelle* tradizionale tra filosofi realisti e idealisti. Da un punto di vista scientifico, si giungerebbe a questo tipo di problema solo se si cercasse di studiare i rapporti tra una realtà postulata e le rappresentazioni che di essa diamo, oppure se si cercasse di analizzare in quale misura gli strumenti materiali che utilizziamo come intermediari indispensabili alla nostra conoscenza siano capaci di modificare i fenomeni osservati. Ma non è lo scopo che qui ci si propone. Basti constatare che le interazioni tra sistemi materiali possono verificarsi indipendentemente dall'intervento della nostra mente, mentre questo tipo d'interazione non è possibile per i sistemi astratti. Se tale può essere un motivo per giustificare la distinzione fatta tra le due categorie di sistemi, bisogna anzitutto dire che questa distinzione è utile, dal momento che lo studio separato delle interazioni tra sistemi astratti consente di capire meglio come la mente intervenga nel processo cognitivo, quali sono le tendenze profonde che ad essa corrispondono e, di conseguenza, qual è l'origine di un certo numero di difficoltà fondamentali contro le quali ci si scontra inevitabilmente in qualsiasi procedimento cognitivo che faccia intervenire le nozioni di sistema, di struttura e di funzione.

In primo luogo bisogna notare che, quando la si traspone dai sistemi materiali a quelli astratti, la nozione di funzione subisce uno spostamento che la fa corrispondere praticamente, nel secondo caso, alla nozione di «significazione». Parallelamente, la nozione d'interazione, applicata ai sistemi astratti, tende ad esprimere l'interdipendenza delle significazioni proprie di ciascuno di questi sistemi. Questa situazione è evidentemente la conseguenza dell'intervento obbligatorio della mente in tutto ciò che può essere contenuto nel termine 'interazione', applicato ai sistemi astratti. Come si è visto, questo tipo d'interazione può aver luogo soltanto nel terzo sistema costituito dalla mente che conosce, e perciò può rapportarsi soltanto a ciò che, in questa mente mediatrice, costituisce un riferimento sufficientemente universale per essere applicabile a tutto ciò che è suscettibile d'essere oggetto di conoscenza; la significazione svolge per l'appunto questo ruolo. Si potrebbe credere che il passaggio dalla funzione alla significazione non sia altro, in definitiva, che una trasposizione sinonimica, adattata ai vari tipi di sistemi. E questa opinione non può che rafforzarsi se si osserva che, per i sistemi materiali, la sostituzione del primo termine con il secondo non presenterebbe molti inconvenienti. La funzione di un sistema materiale A, situato in un ambiente costituito da altri sistemi materiali B, C, D, ..., potrebbe benissimo essere considerata come ciò che esprime la significazione del sistema A per l'ambiente nel quale si trova oppure, al contrario, la significazione dell'ambiente per il sistema A. Ma, in realtà, la nozione di significazione non ha esattamente le stesse frontiere, né le stesse implicazioni, della nozione di funzione. Se è vero che le differenze tra questi due concetti possono talvolta apparire come distinzioni dai contorni molto sfumati, non per questo sono inesistenti, e addirittura rivelano molto bene gli orientamenti profondi della mente, e di conseguenza le tendenze che ci si può aspettare di ritrovare in ogni processo cognitivo. Si è visto che la nozione di funzione pone essenzialmente l'accento sull'insieme delle azioni reciproche che si verificano tra gli oggetti considerati. La funzione di un sistema A in un ambiente dato tiene simultaneamente conto del ruolo di A nei confronti dell'ambiente e dei mutamenti che A può subire a causa di esso. Solo in quanto inclusione marginale, e per giungere a un contenuto esaustivo, la nozione di funzione applicata a un oggetto come il sistema A contiene anche le proprietà intrinseche di questo sistema, vale a dire ciò che, nel suo com-

portamento, non dipende dall'ambiente. Per contro, la nozione di significazione considerata laddove prende origine, ovvero nelle interazioni che fanno intervenire la mente, appare soprattutto centrata sul caso particolare relativo alle proprietà intrinseche. Nella significazione data a un oggetto A da parte della mente che ne prende conoscenza, si constata soprattutto l'azione dell'oggetto sulla mente e non il contrario. Le caratteristiche specifiche della mente intervengono evidentemente nella rappresentazione che ci costruiamo dell'oggetto, ma non si tratta, ad essere precisi, di un'azione della mente sull'oggetto, bensí soprattutto di una particolare strutturazione di ciò che ci proviene dall'oggetto. Nella misura in cui la significazione, nel suo stretto legame con la conoscenza, implica anche l'interdipendenza o il confronto degli oggetti che la mente concepisce o percepisce, si può dire che questo procedimento interviene solo in un secondo tempo, dopo la considerazione di ciascuno degli oggetti in questione. Il posto preminente che cosí si attribuisce alle caratteristiche intrinseche di ogni oggetto, cioè al suo «essere», si ritrova in realtà in ogni processo cognitivo e sembra quindi corrispondere a una costante dello spirito. In tale processo, esiste sempre una fase in cui si è indotti a distinguere vari oggetti e a dire che cosa sono, mentre le interazioni tra questi oggetti appariranno in seguito come legate all'esistenza degli esseri cosí definiti, quasi che trovassero la loro origine in questi stessi esseri. Si potrebbe pensare che si tratti di un procedimento riservato esclusivamente alla metafisica, mentre lo stesso tipo d'operazione si ritrova in ogni procedimento scientifico. Ciò è chiaramente dimostrato da quanto detto finora sullo studio degli elementi e dei sistemi; alle operazioni di partizione in elementi corrisponde la fase in cui i fenomeni si manifestano come aventi origine in esseri distinti. Esistono soprattutto due importanti differenze tra il procedimento metafisico e quello scientifico. Esse consistono, innanzitutto, nel fatto che il primo definisce i propri oggetti a priori, o quasi - a priori, deducendo in seguito le loro interazioni, mentre il secondo opera quasi - a priori soltanto per la partizione in elementi e definisce i propri oggetti solo a partire dall'osservazione delle interazioni; in secondo luogo, nel fatto che le definizioni metafisiche sono esaustive, mentre quelle scientifiche sono soltanto funzionali.

Parlare di significazione richiama infine la nozione d'«informazione», dal momento che l'informazione, in qualche modo, si riferisce sempre a un trasporto di significanti. Emerge cosí la trama capace di collegare i concetti di funzione e d'informazione. Questa constatazione non è nuova, basti pensare che la nozione d'informazione è già stata ampiamente usata per rendere conto del comportamento di numerosi sistemi, da un punto di vista tecnico o scientifico. Bisogna tuttavia riconoscere che questo uso talvolta suscita molte perplessità, attestate, ad esempio, dalle frequenti critiche relative all'uso del concetto d'informazione genetica in biologia molecolare. Infatti, spesso non si è molto lontani da un uso metaforico, quando si trascrive in questo linguaggio ciò che corrisponde, in definitiva, a diverse interazioni specifiche, e, di conseguenza, a diverse funzioni combinate in modo piú o meno complesso, a seconda dei caratteri strutturali del sistema in cui si svolgono. Per ritrovare

un modo di spiegazione suscettibile d'essere piú largamente accettato, bisognerebbe che ciò che appare metaforico fosse sufficientemente esplicitato per raggiungere lo status degli abituali enunciati scientifici che, senza escludere le analogie, impongono a queste ultime limiti severi riguardanti soprattutto la possibilità di concepire fisicamente i processi tra i quali esse stabiliscono relazioni. Nei casi appena citati, la gradazione concettuale che va dalla nozione di funzione a quella d'informazione, o viceversa, sembra corrispondere al piú naturale approccio epistemologico per ridurre le difficoltà incontrate. [P. D.].

La funzione di qualunque **oggetto** (cfr. **soggetto/oggetto**) è legata al comportamento di quest'oggetto in un dato **ambiente**, esso stesso costituito da **elementi** diversi. La nozione di funzione è dunque inseparabile da quella d'**interazione** e di conseguenza da quella di **sistema**. D'altra parte essa si trova tanto all'inizio quanto alla fine di qualunque procedura scientifica. La **conoscenza** comincia con la suddivisione dei fenomeni in elementi (cfr. **fenomeno, dato**). In seguito si procede alla determinazione delle funzioni d'interazione tra gli elementi, delle relazioni di **dipendenza/indipendenza** tra di essi, cercando sempre una **riduzione** a interazioni tipiche ed estreme (cfr. **spiegazione**), pervenendo cosí alla definizione degli elementi (cfr. **concetto**). Qui termina la procedura analitica e induttiva e ne comincia un'altra, deduttiva e sintetica (cfr. **analisi/sintesi, induzione/deduzione**). Si tratta ora della **previsione** di quello che sarà il comportamento di tali elementi in un sistema non osservato sperimentalmente (cfr. **esperimento**). Ciò pone molteplici problemi, relativi sia alle relazioni del sistema studiato con altri che costituiscono il suo ambiente (cfr. **struttura**), sia ai livelli d'**osservazione** in cui ci si pone (cfr. **sistematica e classificazione**) nella costruzione delle **ipotesi** o dei modelli (cfr. **modello**) capaci di permettere delle generalizzazioni (cfr. **locale/globale, semplice/complesso**). Per di piú, nelle funzioni finalizzate (cfr. **organismo, vita, società**) il problema della causalità si complica (cfr. **causa/effetto**). Nei sistemi astratti (cfr. **senso/significato, rappresentazione**), la presenza del **linguaggio** implica il soggetto, e la funzione diventa anche **informazione**.

Infinitesimale

Questo articolo si propone di esporre la soluzione del classico paradosso degli infinitesimi leibniziani con il metodo – meramente logico – della cosiddetta analisi non standard. Sviluppato negli anni '60 dalla scuola di Robinson, tale metodo ha una grande portata euristica, problematica ed epistemologica per le seguenti ragioni. Come progetto (galileiano) di matematizzazione della natura, la scienza moderna inizia con la dinamica, cioè con la teoria matematica del movimento. Qualunque siano i paradigmi che si sono poi succeduti (termodinamica, meccanica quantistica, biologia molecolare, teoria dei sistemi, strutture dissipative, teoria delle catastrofi, ecc.) è impossibile sottovalutare l'ampiezza (ancora attuale) della rottura, da essa segnata, non fosse altro per il fatto che la dinamica, dopo aver fornito fino a saturazione norme alla nostra episteme, resta ancora uno dei propulsori principali delle matematiche contemporanee (problema degli *n* corpi, turbolenza, analisi qualitativa dei sistemi dinamici, teoria della stabilità strutturale e delle biforcazioni, ecc.). Ora, appena si risale dal suo formalismo di base – cioè il formalismo differenziale – fino al suo concetto primitivo – vale a dire quello di infinitesimo – ci s'imbatte in una contraddizione. Data infatti la struttura archimedea della retta reale, una quantità infinitesimale è necessariamente nulla. Se il continuo è divisibile all'infinito senza residuo, non si dànno né degli «atomi» indivisibili che possano fermare il processo di divisione, né degli infinitamente piccoli che lo esauriscano.

Dunque, quel che sembra piú certo alla ragione moderna (certo al punto da avere forza di legge) si basa, apparentemente, su un calcolo sintatticamente consistente e semanticamente inconsistente. C'è qui come uno scandalo metodologico, un'alienazione epistemologica, una spaccatura ontologica, in breve un dimezzamento che esige una chiarificazione. Verrà delineata qui la sua storia teorica e non quella aneddotica.

Questa storia abbastanza movimentata può essere divisa in prima approssimazione in tre periodi. Il primo, che va da Leibniz a Cauchy passando per Eulero, è quello dell'elaborazione e dello sviluppo del calcolo differenziale e integrale secondo lo stile leibniziano. Il secondo, che conduce direttamente all'analisi contemporanea, comincia, con Cauchy e Weierstrass, con una crisi di rigore, la rimozione degli infinitesimi leibniziani e la loro sostituzione con un calcolo di limiti. Questo nuovo calcolo nello stesso tempo sintatticamente e semanticamente consistente, si è rivelato poi di una tale efficacia che la questione iniziale dello statuto logico-concettuale degli infinitesimi si è trovata a poco a poco sedimentata, relegata, dimenticata, cancellata, rimossa: in ogni caso, è decaduta al rango di una curiosità per filosofi (anche se matematici come Peirce vi davano ancora grande importanza). È soltanto negli anni '60 di questo secolo che tale questione è stata riattivata grazie all'analisi non standard e ciò in un modo, sulle prime, abbastanza strano.

Se si volesse infatti datare l'origine di questo terzo periodo, occorrerebbe risalire agli anni '20, ai primi lavori di Skolem sui modelli non standard. All'inizio si tratta di una problematica puramente logica: non ha alcun legame diretto con nessun dominio specifico della matematica, in particolare, dunque neanche col calcolo differenziale.

Il problema che si poneva Skolem era quello di sapere in quale misura il linguaggio formale che si utilizza per parlare di un oggetto matematico permetta di caratterizzarlo (almeno strutturalmente). Si trova che in generale ciò è impossibile. Dunque esisteranno in generale classi di oggetti differenti (non isomorfi) sintatticamente indiscernibili, cioè che possiedono esattamente le stesse proprietà purché queste siano formulate in un certo linguaggio di base. Tale risultato manifesta una spaccatura – generale e non eliminabile – tra sintassi e semantica; ci si è presto resi conto che il paradosso semantico degli infinitesimali non ne è altro che un caso particolare.

Si consideri infatti l'insieme **R** dei numeri reali corredato della sua struttura algebrica, della sua struttura d'ordine e della sua struttura topologica. Sia L un linguaggio formale di base che si utilizza per «parlare» di **R**. Esistono estensioni ***R** di **R** (corredate di una struttura algebrica, di una struttura d'ordine e di una struttura topologica) che sono indiscernibili da **R** relativamente a L, cioè che hanno esattamente la stessa teoria purché quest'ultima sia ridotta agli enunciati esprimibili in L. Una tale estensione viene chiamata modello non standard della teoria dei numeri reali. Se si tratta di una estensione in senso proprio, poiché ***R** è (al pari di **R**) totalmente ordinato, esistono in ***R** dei numeri che sono «infiniti» relativamente ad **R**, cioè dei numeri maggiori di tutti i numeri di **R**. Gli inversi di questi numeri infiniti sono degli infinitesimi nel senso leibniziano del termine.

Ma questo primo chiarimento non è certo sufficiente per fondare una dottrina degna del nome di analisi non standard. Se infatti ***R** è un modello non standard *qualunque* di **R** – la cui esistenza è assicurata soltanto dal teorema generale

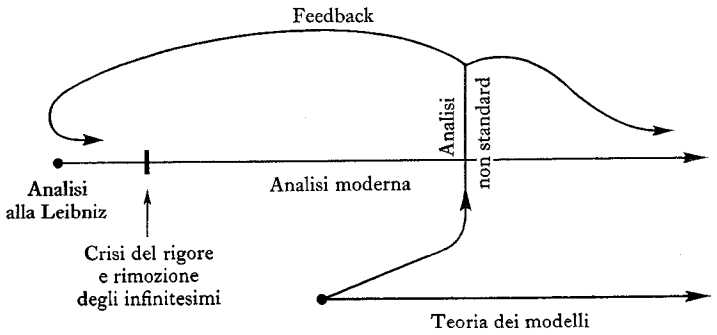


Figura 1.

La storia logico-concettuale dell'infinitesimale: un andamento non lineare, ma ramificato.

di esistenza dei modelli non standard – non vi si possono in generale prolungare funzioni familiari come le funzioni trigonometriche, esponenziali o logaritmiche. Non si potrebbe dunque parlare di analisi su ***R**. Come tale l'analisi non standard presuppone un metodo di costruzione di particolari modelli non standard ai quali tutte le entità costitutive del discorso dell'analisi siano *automaticamente* prolungabili.

La temporalità propria della storia logico-concettuale degli infinitesimi non è dunque quella di una storia lineare. È una temporalità ramificata e ricorrente che può venir grosso modo schematizzata come nella figura 1.

1. *Il paradosso degli infinitesimali.*

1.1. N, Z, Q, R, $\bar{\mathbf{Q}}$, C.

Sarà bene cominciare col ricordare le strutture di cui si farà uso.

Sia **R** l'insieme dei numeri reali (di un certo universo della teoria degli insiemi). Esso si costruisce a partire dall'insieme di base **N** degli interi naturali in tre tappe.

La prima è la costruzione dell'insieme **Z** degli interi positivi e negativi per aggiunta a **N** degli interi negativi. **Z** è un anello commutativo totalmente ordinato.

La seconda è la costruzione dell'insieme **Q** dei numeri razionali per aggiunta a **Z** degli inversi $1/p$ dove $p \in \mathbf{Z}$ è un intero non nullo. **Q** è un corpo commutativo totalmente ordinato detto corpo delle frazioni di **Z**.

Esistono due differenze essenziali tra **Z** e **Q**. Prima di tutto **Q** è un corpo mentre **Z** non è che un anello: mentre l'inverso di un intero n non nullo non è un intero (eccetto che per $n = \pm 1$), l'inverso di un razionale non nullo è razionale. Per costruzione, **Q** è il piú piccolo corpo contenente **Z**.

Per ulteriori particolari si rimanda all'articolo «Calcolo» in questa stessa *Enciclopedia* (vol. II, cfr. in particolare pp. 389-96). Va ancora ricordato che **Q** ammette una topologia indotta dalla metrica definita dalla distanza $d(x,y) = |x-y|$ ove con $|x|$ si denota il valore assoluto di x. Com'è noto, in **Q** esistono numeri arbitrariamente vicini gli uni agli altri. Ma l'esistenza di numeri irrazionali come $\sqrt{2}$ mostra che **Q** *non è un continuo*. Benché gli elementi di **Q** si «susseguano» gli uni agli altri (ordine totale) non essendo separati che da distanze «infinitesimali», **Q** è in qualche modo «incompleto» rispetto alla sua topologia. Di qui l'idea di un «completamento» topologico di **Q**.

È questa la terza tappa, cioè la costruzione del corpo totalmente ordinato **R** dei numeri reali per completamento di **Q**. Esistono diversi metodi, il piú celebre dei quali è quello di Dedekind. Per costruzione, **Q** è denso in **R**: ogni numero reale è approssimabile, con la precisione che si desidera, mediante numeri razionali.

Completando **Q** si aggiungono «molti» numeri nuovi. **Q** ha infatti per car-

dinale (nel senso della teoria di Cantor) la potenza del numerabile (esistono procedure molto semplici che permettono di enumerare i razionali). Al contrario, il continuo **R** ha per cardinale la potenza del continuo che è un numero transfinito strettamente maggiore. Si può anche dire che, se si sceglie a caso un numero reale, si ha una probabilità *certa* di ottenere un irrazionale e una probabilità *nulla* di ottenere un razionale: «pressoché tutti» i numeri reali sono irrazionali. (Questo risultato non è molto soddisfacente dal punto di vista concettuale perché esiste comunque un'infinità di razionali distribuiti in **R** in modo denso. In realtà, è uno degli aspetti in cui può ripresentarsi il paradosso degli infinitesimi. Bisognerebbe dire che la probabilità P di trovare un razionale scegliendo un numero reale a caso è infinitesimale. Ma sinché le probabilità sono dei numeri reali, P è necessariamente zero; le cose cambiano nel caso in cui si considerino delle probabilità in un modello non standard di **R**).

I numeri irrazionali si dividono a loro volta in due classi. In una gli irrazionali algebrici (come $\sqrt{2}$) che sono soluzione di una equazione algebrica $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ a coefficienti a_i razionali. Nell'altra gli irrazionali trascendenti (come π o e). Poiché è facile costruire degli algoritmi che permettano di enumerare i numeri algebrici, il loro insieme ha la potenza del numerabile. «Pressoché tutti» i numeri reali sono dunque trascendenti benché non si diano che pochissimi esempi espliciti.

La considerazione dei numeri algebrici conduce naturalmente ad altre estensioni di **Q** e di **R**. $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ sono entrambe soluzioni dell'equazione algebrica di secondo grado $x^2-2=0$. Ma se si considera l'analoga equazione $x^2+2=0$ si constata subito che non ha alcuna soluzione reale poiché, essendo ogni quadrato positivo, si ha sempre $x^2+2\geq 2$. È dunque naturale cercare di «completare» **Q** ed **R** relativamente all'esistenza delle radici delle equazioni algebriche in generale.

Nel caso di **R**, si cercherà una estensione $\bar{\mathbf{R}}$ di **R** che sia il piú piccolo corpo contenente **R** tale che ogni equazione algebrica di grado n a coefficienti in **R** vi abbia n radici (distinte o no). $\bar{\mathbf{R}}$ si dice una chiusura algebrica di **R** ed è unica a meno di isomorfismi. Per ottenere $\bar{\mathbf{R}}$ basta aggiungere a **R** l'unità immaginaria $i=\sqrt{-1}$: $\bar{\mathbf{R}}=\mathbf{R}(i)$ è il corpo **C** dei numeri complessi (**C** è un corpo topologico commutativo, topologicamente completo e algebricamente chiuso, che non possiede piú una struttura d'ordine naturale: cfr. «Calcolo», pp. 430-33).

Tale risultato è notevole poiché mostra che **C** è uno spazio vettoriale su **R** di

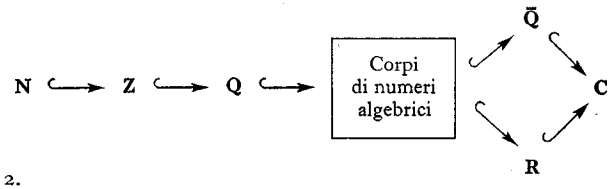


Figura 2.

La rete di inclusioni delle grandi strutture numeriche (↪ significa 'immersione con conservazione della struttura').

dimensione 2 (come mostra la rappresentazione vettoriale dei numeri complessi) e dunque – essendo ogni estensione di **R** uno spazio vettoriale su **R** – che non esistono corpi intermedi tra **R** e la sua chiusura algebrica.

Tutt'altro accade per **Q**. Sia $\bar{\mathbf{Q}}$ la chiusura algebrica (supposta inclusa in **C**) di **Q**, ottenuta aggiungendo a **Q** le soluzioni (esistenti in **C** per costruzione di **C**) delle equazioni algebriche a coefficienti in **Q**. Si può mostrare che, come spazio vettoriale su **Q**, $\bar{\mathbf{Q}}$ è di dimensione infinita e che esiste una infinità di estensioni intermedie $\mathbf{Q}\subset K\subset\bar{\mathbf{Q}}$ di dimensione finita su **Q**. Queste estensioni, chiamate corpi di numeri algebrici, sono l'oggetto della teoria dei numeri (si veda l'articolo «Divisibilità» in questa stessa *Enciclopedia*).

Le grandi strutture numeriche che servono di base all'aritmetica, all'algebra e all'analisi, sono dunque collegate dalla rete di inclusioni schematizzata nella figura 2.

Se (dalla fine del XIX secolo con Kronecker, Weber, Dedekind, ecc.) la teoria dei numeri è innanzitutto lo studio delle proprietà di divisibilità, se la geometria algebrica è prima di tutto (da Riemann in poi) lo studio degli anelli di polinomi e dei corpi di funzioni razionali, l'analisi, di per sé, è innanzitutto lo studio delle classi di funzioni definite su **R** e su **C**.

Ci si limita qui all'analisi reale. Il corpo di base sarà dunque **R**, corpo topologico commutativo, topologicamente completo e totalmente ordinato. Quanto alla sua struttura d'ordine, **R** possiede la proprietà (ereditata da **N**) di essere archimedeo: per ogni $x>0$ di **R**, arbitrariamente piccolo, e per ogni $M>0$ di **R**, arbitrariamente grande, esiste un intero n tale che $nx>M$: si può dunque «oltrepassare» qualunque numero a partire da qualunque altro. Ciò implica che **R** non possiede infinitesimi.

1.2. L'infinitesimale leibniziano come sovvertimento della referenza.

Agl'inizi, l'analisi su **R** riguarda da una parte la ripresa dei metodi integrali di Archimede per il calcolo delle aree e dei volumi e dall'altra lo studio delle proprietà differenziali delle funzioni. Queste funzioni sono sia funzioni reali $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $(x\mapsto f(x))$ di una variabile reale x, sia funzioni reali $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}((x_1, \ldots,$

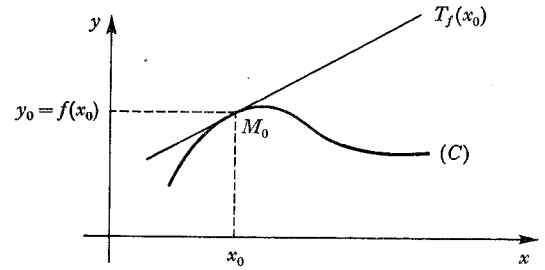


Figura 3.

La tangente a una curva in un punto.

$x_n) \mapsto f(x_1, ..., x_n)$) di piú variabili reali $x_1, ..., x_n$, sia funzioni $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m((x_1, ..., x_n) \mapsto (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)))$ in cui $f_1, ..., f_m$ sono funzioni di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$, sia infine funzioni implicite $f(x,y) = 0$.

La nozione insiemistica di funzione come legge che associa a ogni elemento x del dominio di definizione un elemento $f(x)$ del dominio dei valori, si è prodotta solo piú tardi (cfr. gli articoli «Applicazioni» e «Funzioni» in questa stessa *Enciclopedia*). Inizialmente si trattavano funzioni la cui espressione è esplicita (trigonometriche, esponenziali, logaritmiche; coniche, cubiche, ecc.; spirali, lemniscate, ecc.) e si rappresentavano con i loro grafici. Se per esempio $f(x)$ è una funzione di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ la sua rappresentazione grafica è la «curva» del piano $\mathbf{R}^2$ di equazione $y = f(x)$.

La rappresentazione simbolica (dovuta a Descartes) delle curve in termini di coordinate segnò una rottura essenziale in quanto *a*) fece «passare» alla scrittura l'intuizione geometrica del percepito; e *b*) aprí al concetto di relatività: poiché un oggetto geometrico non può essere algebrizzato (cioè espresso simbolicamente) che in relazione a un sistema arbitrario (relativo) di riferimento, le sue proprietà intrinseche devono risultare invarianti per cambiamenti di riferimento.

Ci sarebbe tutta una «archeologia» da de-sedimentare circa il rapporto tra geometria e scrittura: a partire dalla rottura cartesiana la geometria verrà subordinata al primato della scrittura e sarà soltanto nei periodi critici in cui viene ripensata e ristrutturata che essa ritornerà a *data* fenomenologici (geometrie non-euclidee, geometria sintetica, superfici di Riemann, catastrofi). Ora, appena si ammette, per ragioni di efficacia metodica, un tal primato della scrittura simbolica, si deve altrettanto esigere che «passino» alla scrittura le intuizioni geometriche di base.

Tra queste s'impone immediatamente la nozione di tangente. Data una funzione $f(x)$ che possiede una certa «consistenza», il cui grafico $y = f(x)$ sia cioè una curva (C) nel senso intuitivo e materiale del termine (un tracciato sul piano), è possibile in generale associare a ogni punto $M_0 = (x_0, f(x_0))$ di (C) una tangente $T_f(x_0)$ definita come la retta che approssima meglio (C) in M_0, cioè il cui «contatto» con (C) in M_0 è massimale (fig. 3).

Ci sono due modi di avere intuizione di una tangente, l'uno «dinamico» e l'altro «statico». Ciascuno di essi dà luogo a una specifica traduzione scritturale.

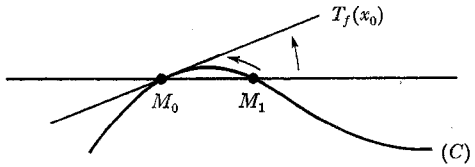


Figura 4.
La tangente come limite.

1) Nell'intuizione «dinamica», la retta $T_f(x_0)$ è il *limite* delle secanti M_0M_1 di (C) per il punto M_1 che tende verso il punto M_0 (fig. 4).

Questa intuizione «passa» facilmente alla scrittura. M_1 è il punto di coordinate $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ in cui Δx è un incremento di x tendente a zero. Il coefficiente angolare della retta M_0M_1 è dunque $\Delta f / \Delta x$ ove Δf è l'incremento $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ di f corrispondente a Δx (fig. 5). La tangente $T_f(x_0)$ di (C) in M_0 è di conseguenza la retta passante per M_0 e avente per coefficiente angolare il limite – che si scrive $f'(x_0)$ e si chiama derivata della funzione $f(x)$ in x_0 – del rapporto $\Delta f / \Delta x$ per Δx che tende a zero.

Se si è in grado di definire rigorosamente la nozione di limite, si è in grado ipso facto di definire analiticamente la nozione geometrica di contatto. Questo sarà il punto di vista di Newton (almeno in parte), poi di d'Alembert e, infine, di Cauchy e soprattutto di Weierstrass.

2) Nell'intuizione «statica» la tangente non è definita da un processo (passaggio al limite) ma da una *posizione*. La tangente $T_f(x_0)$ è *la* retta che taglia (C) in M_0 in due punti infinitamente vicini. È la retta che – in un intorno infinitesimale di M_0 – si identifica con (C). Per fare «passare» alla scrittura questa intuizione occorre:

a) introdurre la nozione di incremento infinitesimale dx di x;
b) definire l'incremento infinitesimale $df = f(x_0 + dx) - f(x_0)$ di f in x_0 corrispondente a dx;
c) ipotizzare che il rapporto df/dx sia definito e costante per ogni dx (ed è questa costanza che traduce l'intuizione che (C) è localmente indiscernibile dalla sua tangente);
d) definire la derivata (coefficiente angolare della tangente) $f'(x_0)$ di f in x_0 come uguale a questo rapporto costante.

Leibniz ha immortalato la definizione «statica». Si osservi che, fin dall'origine, essa è profondamente problematica e ambivalente. Affinché sia coerente, occorre infatti che 1) dx non sia nullo poiché in caso contrario df/dx si ridurrebbe al rapporto indeterminato 0/0; e che 2) pertanto dx sia un numero, poiché in caso contrario non si potrebbe definire il valore di $f(x + dx)$, né dunque quello di df e di df/dx.

Ora, come numero, dx è necessariamente nullo, il che manifesta l'ambivalenza linguistica che si è incontrata nelle definizioni «statiche» di contatto: «intersecare in due punti infinitamente vicini» e/o «intersecare in due punti coincidenti».

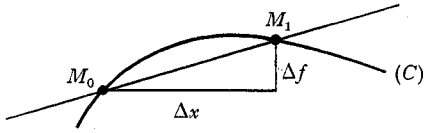


Figura 5.
La secante.

Il problema sta dunque nel fatto che il «passaggio» alla scrittura dall'intuizione «statica» passa attraverso l'introduzione di un supplemento simbolico – quello del *dx* leibniziano – che viola il principio d'identità e che sovverte la referenza.

Inizialmente, la nozione di incremento infinitesimale è un concetto. Il *coup de force* di Leibniz è stato di «ritualizzarla» con l'introduzione di un supplemento alla notazione scritta il cui statuto è paradossale; infatti, come identità sintattica, 1) *dx* è l'indice di referenti numerici nello stesso tempo arbitrari e impossibili, e 2) *dx* è il simbolo di un concetto semanticamente inconsistente.

Per l'ideologia positivista questa aporia è sufficiente per legittimare la rimozione degli infinitesimi. Ma nella misura in cui ci si propone di mostrare che la forzatura leibniziana rinvia di fatto a una dimensione cruciale dell'articolazione *generale* tra il simbolico e il reale, diventa necessario delineare i contorni del suo statuto nel modo piú esatto possibile.

Il *dx* leibniziano è un simbolo-indice, per dirla con Peirce, che «fissa» un concetto contraddittorio. È una finzione letterale che viene trattata come un numero. Non ha pertanto per referenza alcun numero concreto ma un posto generato dai procedimenti stessi di costruzione dei numeri. Si consideri infatti l'algoritmo di costruzione di **N** con l'operazione «successivo di» (si veda il citato articolo «Calcolo», p. 408). Poiché **N** è infinito, la sua iterazione trasgredisce indefinitamente il suo limite. Ma l'algoritmo induce il posto di un numero «infinito» maggiore di tutti gli altri. Questo posto inoccupabile associato a un concetto senza referente e contraddittorio segna un «effetto de-limitante» relativo a **N**. Per riprendere una terminologia di Badiou [1969], si può chiamare infinito-punto un contrassegno supplementare che occupa un posto inoccupabile e dipendente, per tutto ciò che non riguarda questa occupazione, dai procedimenti iniziali. L'infinito-punto è il contrassegno di un inaccessibile del dominio, completato da una *forzatura* dei procedimenti, che li costringe ad avere valore anche per ciò che hanno escluso.

L'inverso di un intero «infinito» è appunto un infinitesimo.

Di piú, il *dx* leibniziano nel suo rapporto con la referenza è un elemento di codice che 1) possiede un'identità sintattica definita (poiché è una costante e non un simbolo di variabile), 2) si riferisce a elementi non definiti.

Se malgrado tutto si volesse definire un referente concreto del *dx* leibniziano, si sarebbe costretti a riferirsi non a un numero ma a un evento. S'immagini il processo dinamico di una quantità *x* che si annulla: *dx* rappresenta l'istante in cui *x* si annulla, non essendo «piú» un numero non nullo e non essendo «ancora» zero. Ma questa interpretazione non fa altro che riproporre la questione; infatti, poiché *dx* ha lo statuto simbolico di un numero, il suo stesso statuto simbolico e il suo referente nell'evento diventano da quel momento eterogenei.

In conclusione il *dx* leibniziano è una finzione letterale, strutturata come un numero, che impone un sovvertimento della referenza attraverso una separazione fra significante e significato.

È un infinito-punto nel senso di Badiou. È un simbolo-indice «dimezzato», tagliato in due, ove l'aspetto di indice e l'aspetto di simbolo sono incompatibili.

Per il chiarimento del suo statuto logico-concettuale occorre intrecciare diversi registri di analisi: quello dei posti, quello delle identità simboliche, quello dei referenti concreti, quello dei concetti e quello degli eventi:

- posto: «effetto de-limitante» della costruzione di **R**;
- identità simbolica: *dx*;
- referenti concreti: numeri infinitesimali (inesistenti in **R**);
- concetto: quantità infinitesimale (contraddittoria);
- evento: annullarsi di una quantità.

Prima di queste analisi occorre abbozzare in via preliminare le modalità di sviluppo della polemica intorno agli infinitesimi e ricordare come sono stati formalmente tradotti.

1.3. Polemiche e fondazione.

Intorno agli infinitesimi sono venuti a convergere tutti i problemi tradizionali dell'infinito. Qualcosa è stato già anticipato; si vedrà ora meglio come questo processo storico si è chiuso grazie alla rimozione degli infinitesimi stessi. Ci si trova qui di fronte all'esempio piú importante della spaccatura dialettica tra la produzione di un infinito-punto inerente alla costruzione di un reale e l'esigenza della rimozione imposta dalla stabilizzazione del suo uso: una volta affermatosi, ogni metodo rimuove il suo concetto originario e ipostatizza la sua origine nella sua stessa produzione. Questo è, in fondo, il gioco heideggeriano della differenza essere/esistente: la genesi dell'esistente a partire dall'essere è affetta da un residuo che deve essere soggettivamente rimosso e simbolicamente precluso affinché lo stesso esistente prodotto possa autonomizzarsi come tale. Una volta affermatasi (ma non fondata) l'efficacia metodica del calcolo differenziale e integrale, si tratterà di mettere in luce la sua «impurità di origine» (Badiou).

L'atteggiamento di Leibniz verso gli infinitesimi è una posizione *formalista* molto sottile. Privilegiando la struttura formale del linguaggio rispetto alla realtà della referenza, egli considera gli infinitesimi «finzioni ben fondate». Pur fondando un metodo piú conforme all'*ars inveniendi* che non i metodi di esaustione di tipo archimedeo, gli infinitesimi non hanno tuttavia alcuna realtà *effettiva*. Essi non sono che «cose ideali», «finzioni utili per abbreviare e per parlare universalmente».

Occorre separare qui «abbreviare» da «parlare universalmente». Gli infinitesimi permettono davvero di abbreviare i metodi che si basano sul confronto di infiniti, *in quanto assolutizzano il concetto relativo di approssimazione*. Sotto

questo profilo, si può sempre evitare di usarli e «al posto dell'infinito o dell'infinitamente piccolo, [si possono prendere] quantità tanto grandi o tanto piccole quanto occorre perché l'errore sia minore dell'errore dato»; e aggiungere, con Leibniz, «che si differisce dallo stile di Archimede solo nelle espressioni, che sono piú dirette nel nostro metodo e piú conformi all'arte di inventare» [Leibniz 1701, ed. 1962 p. 350]. In questa accentuazione del lato pragmatico della questione, l'essenziale è lasciato nell'ombra.

Ma Leibniz ha anche enfatizzato l'aspetto (simbolico) che corrisponde non già ad «abbreviare», ma a «parlare universalmente». È qui che si manifestano insieme la profondità metafisica e il limite di un primato ontologico del linguaggio formale che è rimasto enigmatico fino all'analisi non standard. Per Leibniz infatti gli infinitesimi, benché fittizi, sono delle finzioni «fondate sulla realtà» che non riducono affatto la scienza dell'infinito a una finzione. Al contrario: il calcolo che essi fondano è *sicuro*. A questa garanzia sintattica, a questa sicurezza formale, in breve a questa consistenza di un metodo che prende origine tuttavia da un sovvertimento della referenza e da una spaccatura irriducibile tra significante e significato, Leibniz dà una risposta metafisica e profetica: «Si constata che le regole del finito funzionano nell'infinito come se ci fossero degli atomi (cioè degli elementi assegnabili della natura) benché non ce ne siano affatto visto che la materia è in realtà suddivisa all'infinito; e che viceversa le regole dell'infinito funzionano nel finito, come se ci fossero degli infinitamente piccoli metafisici, benché non se ne abbia affatto bisogno e benché la materia non giunga mai a particelle infinitamente piccole: ma le cose stanno cosí perché tutto è governato dalla ragione, e diversamente non ci sarebbero né scienza né regole, il che non sarebbe affatto conforme con la natura del principio supremo» [*ibid.*].

Sarebbe ben difficile sopravvalutare questo passo. Vi si articolano chiaramente tre livelli.

Il primo è il livello semantico (referenziale): la materia in atto è senza atomi e praticamente senza infinitamente piccoli (il che non è contraddittorio).

Il secondo livello è sintattico (logico): rispetto al linguaggio – cioè rispetto alle regole e non alla sostanza – il finito e l'infinito sono intercambiabili. Sono discernibili all'interno di uno stesso punto di vista, ma divengono formalmente indiscernibili se si cambia punto di vista. Di qui il ruolo del «come se» che attesta il primato ontologico delle regole. In breve, Leibniz relativizza l'opposizione tra finito e infinito. Una struttura infinitaria relativamente a una finitezza iniziale può essere nondimeno suscettibile di regole finitarie. Sul filo della metafora prospettica suggerita dal termine 'punto di vista', si potrebbe quasi dire che per Leibniz l'infinito è una «anamorfosi» del finito.

Il terzo livello è metafisico: quello del principio «supremo» di ragione sufficiente. Questa «caduta» dell'argomentazione non è piú, per noi, molto soddisfacente. Non si potrebbe certamente piú invocare un principio per sostenere la tesi che la ragione formale trascende la realtà. Ma si noti che, parallelamente a questa garanzia metafisica, Leibniz anticipa chiaramente una risposta di altro ordine, cioè quella della costruzione di una estensione ***R** di **R** che – contenendo numeri sia infinitamente grandi sia infinitesimali – sarebbe tuttavia retta dalle

stesse regole di **R**, cioè sarebbe indiscernibile da **R** non come oggetto concreto ma come substrato predicabile.

In conclusione si può dunque affermare che Leibniz sottomette a un chiasma l'evidenza naturale. Egli assolutizza la relatività dei confronti di infiniti («abbreviare») e relativizza l'opposizione tradizionalmente assoluta tra finito e infinito («parlare universalmente»).

La posizione formalista di Leibniz perde ogni acutezza e ogni consistenza quando si ipostatizza in una posizione *realista* che afferma l'esistenza degli infinitesimali. Questa sarà purtroppo la posizione di L'Hôpital nel suo trattato di calcolo differenziale *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* [1696], trattato che serví da vettore pedagogico alle idee leibniziane.

L'Hôpital pone come assioma che due quantità che differiscono di una quantità infinitesimale sono uguali. Ora, siccome ammette pure che le estensioni dei numeri reali ottenute con l'aggiunta d'infinitesimi soddisfano le regole dell'aritmetica (principio di continuità), si trova costretto a negare la conseguenza, banale, che $x+dx=x$ implichi $dx=0$.

Il fatto è che, parallelamente al suo chiarimento logico-concettuale, un uso algebrico coerente dell'infinitesimale esige che si introduca su un'estensione ***R** di **R** una relazione di equivalenza (essere infinitamente vicino) che sia piú debole della relazione di uguaglianza ma che coincida coll'uguaglianza quando è ristretta a **R**. È allora necessaria un'attrezzatura formale e concettuale di cui all'epoca non si disponeva. Come osserva Robinson: «In realtà ciò che mancava a quel tempo era un linguaggio formale che avrebbe reso possibile dare una formulazione precisa e una delimitazione delle leggi [cioè le regole subordinate al "come se" leibniziano] che si supponeva di applicare ugualmente ai numeri finiti e ai sistemi estesi che includono sia numeri infinitamente piccoli sia numeri infinitamente grandi» [1966, p. 266].

L'evidente insostenibilità della posizione realista condusse attraverso critiche sia metafisiche (per esempio Berkeley [1734]) sia matematiche (per esempio Laplace) alla convinzione che il calcolo differenziale era di diritto utilizzabile solo alla condizione di fondarlo su basi differenti. Il primo difensore di questa nuova posizione, che privilegiò a parole il «rigore» e nei fatti la referenza, fu d'Alembert. È questi che introduce il centrale concetto di limite, ritornando all'intuizione «dinamica» dell'infinitesimale (cfr. sopra, p. 449): una quantità è infinitesimale se ha un limite nullo, cioè se si avvicina indefinitamente a zero. Ciò gli permette, a cose fatte, non semplicemente di criticare, ma di rifiutare l'infinitesimale: «Non ci sono affatto nel calcolo differenziale quantità infinitamente piccole...; si tratta unicamente di limiti di quantità finite». «La teoria dei limiti è alla base della vera Metafisica del calcolo differenziale». «Noi dunque non diremo, come tanti geometri, che una quantità è infinitamente piccola né prima che essa si annulli, né dopo che essa si è annullata; poiché cosa vuol mai dire una definizione cosí falsa, cento volte piú oscura di ciò che si vuole definire» [Alembert 1754, p. 987; 1765, p. 542; 1754, p. 987].

Questa sostituzione, violenta ed esplicita, del concetto di limite a quello di infinitesimo, genera una rottura. Rendendo il calcolo *nello stesso tempo* sintatticamente *e* semanticamente consistente elimina la sua «impurità d'origine» ma, per questa via, elimina anche gli agganci che il calcolo aveva in Leibniz con gli altri discorsi. Questo fatto è di grande portata epistemologica. Con d'Alembert il calcolo differenziale si regionalizza e si privatizza. Staccato dal terreno storico che lo governava si autonomizza e, epurato da ogni residuo eterogeneo, diventa capitalizzabile da parte del nuovo potere tecnico-scientifico. Avendo risolto il suo paradosso, suturato il sovvertimento della referenza che lo assillava e stabilizzata la sua intuizione instabile, esso esclude la sua origine (cfr. sopra, p. 451). Ciò è legittimo soltanto se si parte dalla «convinzione» che, al fine di poter essere adeguate alla realtà, le matematiche devono trattare degli oggetti ideali *possibili* soddisfacendo all'adeguatezza di significante-significato-referenza. È tale convinzione che trasforma in evidenza l'opzione ideologica di un feticismo dell'oggetto e della subordinazione del «lavoro» del linguaggio a un esistente la cui realtà è sempre già fissata, *sub specie aeternitatis*. Tutto ciò è assolutamente all'opposto dello «stile» leibniziano che apre il campo dell'esperienza non tanto arricchendo i metodi (le regole del finito funzionano nell'infinito e viceversa) quanto sfruttando le risorse simboliche della scrittura.

In quanto riduce all'immaginario la traduzione simbolica di uno scarto *strutturale* tra il simbolico e il reale, ci si può domandare se il «rigore» preconizzato da d'Alembert e «canonizzato» da Cauchy non segni il momento in cui le matematiche si legano irreversibilmente all'ideologia borghese.

Cauchy fonda rigorosamente l'analisi non soltanto sulla nozione di limite, ma su un calcolo dei limiti. Ciò nonostante non elimina, come d'Alembert, gli infinitamente piccoli e gli infinitamente grandi, piuttosto li reinterpreta e questo gli permette di stabilire un corpus di definizioni, metodi e risultati che costituiscono ancor oggi l'essenziale dell'insegnamento dell'analisi elementare.

Si riportano, come esempio, le sue definizioni d'infinitesimo, di continuità e di derivabilità:

a) «Quando i valori numerici successivi di una stessa variabile decrescono indefinitamente, in modo tale da abbassarsi al di sotto di ogni numero dato, questa variabile diventa ciò che si chiama un infinitamente piccolo o una quantità infinitamente piccola. Una variabile di tal specie ha per limite zero» [1821, ed. 1897 p. 19].

b) Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è continua in un intervallo «se, tra questi limiti, un incremento infinitamente piccolo della variabile produce sempre un incremento infinitamente piccolo della funzione stessa» [*ibid.*, p. 43].

c) Una funzione continua $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è derivabile in x se il rapporto di infinitesimi df/dx ha un limite quando questi tendono a zero.

In quest'ultima definizione, df/dx potrebbe essere sostituito col rapporto delle differenze finite $\Delta f/\Delta x$. Robinson osserva al proposito: «Sembra ragionevole concludere... che secondo Cauchy una funzione non raggiungeva il suo limite direttamente, ma solo attraverso espressioni che comportano infinitesimi» [1966, p. 274].

Cauchy rifiuta il «parlare universalmente» leibniziano, cioè il principio formalista di continuità secondo il quale gli infinitesimi soddisfano le regole dei numeri ordinari: «Per quanto riguarda i metodi, ho cercato di dare loro tutto il rigore richiesto nella geometria in modo da non ricorrere mai ai ragionamenti tratti dalla genericità dell'algebra» [Cauchy 1821, ed. 1897 p. II]. La sua «aderenza» all'intuizione dell'infinitesimale è dunque in Cauchy «un non sequitur "logico" e si può dire che comporta un uso inconscio del "principio di continuità", la cui applicazione egli stesso aveva criticato» [Robinson 1966, p. 275].

L'uso del termine 'inconscio' da parte di Robinson è pertinente. Tutto accade infatti come se, qualunque siano le sue ri-problematizzazioni, la nozione di infinitesimo restasse concettualmente pregnante. Da Cauchy, la situazione non è evoluta di molto. Non si deve dimenticare, infatti, che – contrariamente ad altri «lessici», caduti nella dimenticanza – quello infinitesimale appartiene ancor oggi alla pratica matematica piú quotidiana.

È sufficiente d'altronde questa sola ragione pragmatica a giustificare un metodo che ne fonda l'uso. Come osserva Robinson, «è vero che molte opere classiche di Geometria Differenziale sono state fatte nei termini di una vaga nozione di infinitesimi, e la stessa cosa vale per la Meccanica Analitica. Generalmente si crede che tutto questo lavoro potrebbe, se necessario, essere riscritto conformemente al rigore della matematica contemporanea, ma nessuno intraprenderebbe mai nei dettagli un compito del genere. Non è senza interesse il fatto che oggi possiamo giustificare direttamente l'uso degli infinitesimi in tutti questi problemi» [1961, p. 437].

Dopo Cauchy, si deve essenzialmente a Weierstrass e al suo metodo «$\varepsilon - \delta$» (anticipato da Bolzano) la rimozione definitiva dell'infinitesimale. Si consideri per esempio la sua definizione (ormai standard) della continuità: «$f(x)$ è continua in x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo esiste un $\eta > 0$ tale che $|x - x_0| \leq \eta$ implica $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$». Non si fa piú ricorso al lessico infinitesimale. Ma se questa definizione evita gli infinitesimi non solo come infinito attuale, ma anche (come in Cauchy) come infinito potenziale, è perché fa implicitamente ricorso a $\mathbf{R}$ come totalità (a causa della quantificazione «per ogni ε» e «esiste un η»), cioè a $\mathbf{R}$ come infinito attuale.

Dopo Weierstrass, i concetti fondamentali dell'analisi sono stati formulati nel suo stile.

Poiché il paradosso dell'infinitesimale è – apparentemente – un aspetto del paradosso generale dell'infinito attuale e siccome quest'ultimo è stato risolto da Georg Cantor, non è senza interesse, per concludere questo excursus storico, ricordare la posizione di Cantor a riguardo dell'infinitamente piccolo.

È noto (cfr. anche l'articolo «Infinito» in questa stessa *Enciclopedia*) che con l'introduzione del concetto di ordinale transfinito Cantor riesce a distinguere nell'infinito due nozioni identiche nel finito: quella di cardinale (poten-

za) e quella di ordinale (tipo di un insieme bene ordinato). Approfondendo la distinzione fra l'infinito potenziale (che chiama «infinito impropriamente detto») e l'infinito attuale (che chiama «infinito propriamente detto») Cantor rovescia il dogma aristotelico «infinitum actu non datur»: «Ma se si prendono in considerazione le ragioni che avanza Aristotele contro l'esistenza reale dell'infinito (cfr. la sua *Metafisica*, XI, 10), queste possono essere riportate essenzialmente a un presupposto che implica una *petizione di principio*: non ci sono che numeri *finiti*; e deduce ciò perché conosce soltanto numerazioni per i sistemi finiti. Credo tuttavia di avere dimostrato... che si possono praticare numerazioni determinate per tutti i sistemi, sia finiti che infiniti, alla condizione di imporre ai sistemi stessi una legge determinata che ne fa dei sistemi *bene ordinati*... Emerge qui, come una proprietà particolare dei sistemi *finiti*, che il risultato della numerazione, cioè il numero ordinale, è *indipendente* dall'ordinamento effettuato all'occorrenza, mentre per i sistemi infiniti una tale indipendenza *non* si presenta in generale... è precisamente qui e solo qui che si colloca la differenza essenziale fra il finito e l'infinito, differenza certo fondata in natura e che per questo non dovrebbe mai essere dimenticata in nessun modo; tuttavia si potrà, in nome di questa differenza, negare l'esistenza dell'infinito e mantenere quella del finito: se si fa cadere l'una ci si deve necessariamente sbarazzare dell'altra; ma per questa via dove arriveremo?» [Cantor 1883, pp. 554-55].

Ci si può stupire che Cantor, pur avendo una visione cosí acuta della co-implicazione del finito e dell'infinito, rifiuti tuttavia gli infinitesimi senza osservare che, a parte le differenze storiche, la forzatura leibniziana è dello stesso ordine di quella che egli stesso tenta di giustificare: primato ontologico di un lavoro del simbolico su una realtà sempre già costituita. In realtà la sua posizione è abbastanza sottile e in ogni caso non dogmatica: 1) in analisi (Cauchy-Weierstrass) l'infinitesimale è un infinito impropriamente detto (un limite); 2) i tentativi di definire l'infinitesimale come infinito propriamente detto sono falliti; 3) tale definizione può tuttavia essere possibile, ma in futuro.

«Si porrà forse... il problema seguente: dal momento che in questo modo [con la teoria dei transfiniti], si ottiene per il dominio dei numeri reali una estensione determinata verso l'infinitamente grande, non si potrebbero definire con lo stesso successo numeri determinati infinitamente piccoli o, il che è lo stesso, dei numeri finiti che non si confondano coi numeri razionali o irrazionali..., ma che potrebbero essere introdotti tra i numeri reali in ipotetici posti intermedi? La questione della costruzione di tali interpolazioni, per la quale alcuni autori si sono dati molta pena, non può... ricevere risposta chiara che grazie ai nostri nuovi numeri e piú precisamente sulla base del concetto generale di numerale di insiemi bene ordinati; al contrario i tentativi precedenti, per quanto so, da una parte si basano su una confusione errata tra l'infinito impropriamente detto e l'infinito propriamente detto e dall'altra sono stati condotti su una base completamente incerta e barcollante... Le grandezze infinitamente piccole, per quanto io sappia, sono state utilmente sviluppate fino ad oggi *soltanto* sotto la forma dell'infinito impropriamente detto... Al contrario tutti i tentativi tendenti a trasformare con un *coup de force* questi infinitamente piccoli in infinitamente piccoli propriamente detti, dovettero essere infine abbandonati e se ne dovette ammettere la vanità» [*ibid.*, p. 551].

E Fraenkel, discepolo di Cantor, scriveva ancora nel 1928: «Messo alla prova, l'infinitamente piccolo ha completamente fallito». Ma aggiungeva: «Certo è *concepibile* (anche se con buone ragioni lo si può giudicare inverosimile e rimandare a un lontano futuro) che un secondo Cantor dia un giorno un fondamento aritmetico incontestabile a nuovi numeri infinitamente piccoli, che si rivelino utilizzabili in matematica e che possano forse aprire una via piú semplice al calcolo infinitesimale. Ma finché non si sarà fatto qualcosa del genere... bisognerà attenersi all'idea che in nessun modo si può parlare di esistenza matematica – dunque logica – degli infinitamente piccoli, in un senso identico o analogo a quello che si dà agli infinitamente grandi» [1928, pp. 116-17].

È proprio il «concepibile-inverosimile» evocato da Cantor e Fraenkel che l'analisi non standard realizza.

1.4. La reinterpretazione della notazione differenziale.

Rifiutare gli infinitesimi non significa evidentemente rifiutare il calcolo differenziale e integrale. Anzi. Si è dunque giunti a reinterpretare la notazione leibniziana che ne era la pietra angolare.

Per quanto riguarda il simbolo dx che interviene negli integrali $\int f(x)\,dx$, esso è stato reintrodotto nella teoria insiemista della misura fondata all'inizio del secolo da Lebesgue, Kolmogorov, Radon e dalle loro scuole. Per questo aspetto della questione si rimanda ad altri articoli di questa stessa *Enciclopedia*.

Per quanto riguarda la notazione differenziale la sua traduzione si opera nel modo seguente (si veda anche l'articolo «Differenziale» in questa stessa *Enciclopedia*).

Sia $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione reale di n variabili reali $x_1, \ldots, x_n$. Si supponga che f ammetta derivate parziali $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$ in $x^0 \in \mathbf{R}^n$. In notazione infinitesimale, se i dx_i sono incrementi infinitesimali degli x_i e se df è l'incremento infinitesimale corrispondente, df e i dx_i sono legati dalla *formula* fondamentale

$$(1) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\,dx_n$$

che si tratta di reinterpretare.

Ciò si fa in diverse tappe. x^0 sia l'origine O di $\mathbf{R}^n$ e si cominci col definire la nozione di vettore tangente a $\mathbf{R}^n$ in O. Intuitivamente (cfr. anche la figura 6) un vettore $\mathbf{X}$ tangente a $\mathbf{R}^n$ in O è il vettore velocità in O di una traiettoria $\gamma(t)$ di $\mathbf{R}^n$ passante per O, per esempio per $t=0$, e differenziabile in 0. Siccome $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, le coordinate X_i di $\mathbf{X}$ sono date da

$$(2) \qquad X_i = \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0}$$

Sia allora $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in O. La sua restrizione a γ è una funzione di t, $f(\gamma(t))$, di cui si può calcolare la derivata in t per $t=0$ con la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$(3) \qquad \left.\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(O)\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t=0} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(O)\left.\frac{dx_n}{dt}\right|_{t=0}$$

ossia, per la (2),

$$(4) \qquad \frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Questa formula permette di definire lo spazio – indicato con $T_O\mathbf{R}^n$: spazio tangente a $\mathbf{R}^n$ in O – ove «abitano» i vettori tangenti a $\mathbf{R}^n$ in O. Si può infatti identificare $\mathbf{X}$ con l'operatore di derivazione

$$(5) \qquad \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

che associa a ogni funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ derivabile in O il vettore

$$\mathbf{X}(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = D_X f$$

(derivata di f relativamente a $\mathbf{X}$). $\mathbf{X}$ è un operatore lineare che soddisfa la formula del prodotto:

$$(6) \qquad \mathbf{X}(fg) = f\mathbf{X}(g) + g\mathbf{X}(f).$$

In breve, $T_O\mathbf{R}^n$ è lo spazio vettoriale di dimensione n di base $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$, determinata dalla scelta delle coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbf{R}^n$.

Si indichi con T lo spazio vettoriale $T_O\mathbf{R}^n$ e sia T^* il suo *duale*, cioè lo spazio vettoriale delle forme lineari reali su T (si veda l'articolo «Dualità» in questa stessa *Enciclopedia*).

Si indichi con dx_i l'applicazione di T in $\mathbf{R}$ che associa all'operatore di derivazione

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

la sua i-esima coordinata X_i:

$$(7) \qquad dx_i(\mathbf{X}) = X_i.$$

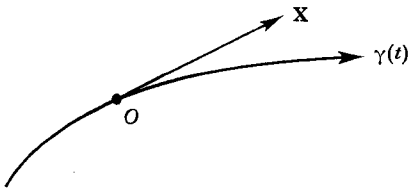


Figura 6.
Vettore tangente.

È banale verificare che dx_i è una forma lineare su T, dunque un elemento di T^*.

Sia $\varphi \in T^*$ e si indichi con φ_i il numero

$$(8) \qquad \varphi_i = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Se $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ è un vettore di T, si ha

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^{n} X_i \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i \varphi_i = && \text{dalla (8)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i dx_i && \text{dalla (7).} \end{aligned}$$

T^* è dunque uno spazio vettoriale di dimensione n, di base $dx_1, \ldots, dx_n$ determinata dalla scelta delle coordinate $x_1 \ldots x_n$ di $\mathbf{R}^n$. Relativamente a questa base le coordinate di uno dei suoi elementi φ sono date dalla (8).

Sia allora $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile nell'origine. Si indichi con df l'applicazione di T in $\mathbf{R}$ che associa al vettore

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

di T il numero

$$(9) \qquad df(\mathbf{X}) = \mathbf{X}(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

df è un elemento di T^* e si ha dalla (7)

$$df(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i(\mathbf{X})$$

e quindi

$$(10) \qquad df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

cioè la formula (1).

In questa «traduzione» che lascia invariate le formule ma che trasforma lo statuto delle entità che esse collegano, il differenziale df non è più un infinitesimo ma una forma lineare sullo spazio degli operatori di derivazione in O.

La descrizione che precede è locale (ristretta a un intorno «infinitesimo» di O). Ciò che è stato indicato con df dovrebbe essere indicato con $df(O)$, differenziale di f in O.

Se f è ovunque derivabile in $\mathbf{R}^n$, si può globalizzare. Si definirà il piano tangente $T_{\mathbf{x}}\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{x}$, il suo duale – detto piano cotangente – $(T_{\mathbf{x}}\mathbf{R}^n)^*$ e

il differenziale $df(\mathbf{x})$ di f in $\mathbf{x}$. Siccome si possono «incollare» i piani tangenti (rispettivamente cotangenti) in uno spazio globale $T\mathbf{R}^n$ (rispettivamente $T^*\mathbf{R}^n$) – detto fibrato tangente (rispettivamente fibrato cotangente) – fibrato su $\mathbf{R}^n$ con una proiezione $\pi : T\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (rispettivamente $\pi : T^*\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$) che associa a un vettore tangente (rispettivamente cotangente) a $\mathbf{R}^n$ la sua origine, si vede che, in ultima analisi, il differenziale df di una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è quello che si chiama una sezione del fibrato cotangente, cioè un'applicazione $df : \mathbf{R}^n \to T^*\mathbf{R}^n$ tale che $\pi \circ df = \mathrm{I}_{\mathbf{R}^n}$ ($\mathrm{I}_{\mathbf{R}^n}$ è l'applicazione identica di $\mathbf{R}^n$). A $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, df associa la forma lineare $df(\mathbf{x})$ su $T_{\mathbf{x}}\mathbf{R}^n$.

Si è ben lontani dal df come infinitesimo.

Di fatto questa globalizzazione ha interesse soltanto se non si considera piú uno spazio $\mathbf{R}^n$ ma uno spazio ottenuto «incollando» carte locali identificabili con «pezzi» di $\mathbf{R}^n$. Per costruzione, questi spazi – detti varietà differenziabili – sono localmente identici a $\mathbf{R}^n$ ma in generale globalmente differenti (si veda l'articolo «Curve e superfici» in questa stessa *Enciclopedia*). Nel caso di $\mathbf{R}^n$ il concatenamento dei livelli «degenera» poiché 1) tutti gli spazi tangenti $T_{\mathbf{x}}\mathbf{R}^n$ sono canonicamente isomorfi a $\mathbf{R}^n$: un vettore tangente a $\mathbf{R}^n$ «è» un vettore di $\mathbf{R}^n$, o ancora il fibrato tangente $T\mathbf{R}^n$ «è» il prodotto diretto $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$; 2) la struttura euclidea di $\mathbf{R}^n$ implica un isomorfismo canonico tra $T\mathbf{R}^n$ e $T^*\mathbf{R}^n$. Il differenziale df si riduce dunque a un campo di vettori di $\mathbf{R}^n$ – detto campo di gradienti di f – che associa a $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ il vettore di $\mathbf{R}^n$ di coordinate $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$.

1.5. L'infinitesimale leibniziano come finzione.

Prima di mostrare (cfr. il § 2) come l'analisi non standard chiarisca lo statuto aritmetico e algebrico dell'infinitesimale leibniziano e come dia consistenza alla dubitativa anticipazione di Cantor (cfr. sopra, p. 456), se ne spiega preliminarmente lo statuto logico-concettuale.

Si riconsiderino le conclusioni di p. 451: prescindendo da ogni feticismo dell'oggetto (cfr. sopra, p. 454), si tratta di dedurre le proprietà logico-concettuali «anormali» del dx leibniziano:

a) è un'identità simbolica che occupa un posto inoccupabile con un «effetto di de-limitazione» per i procedimenti di costruzione dell'insieme $\mathbf{R}$ (infinito-punto);
b) è un simbolo-indice «dimezzato» in cui l'aspetto di indice e l'aspetto di simbolo sono incompatibili;
c) è un significante di cui ogni referente nega il significato;
d) è un simbolo letterale che ha lo statuto sintattico di un numero ma che si riferisce a un evento.

Si tratta di iscrivere nel quadro stesso della logica formale questa finzione e la spaccatura che essa materializza. Si può, d'altronde, ipotizzare che questo scarto tra concetto e logica è universale: l'infinitesimale non ne sarebbe che l'esempio matematico piú rilevante.

Questo significa – nella misura in cui esige un controllo logico-concettuale della contraddizione – che un chiarimento di questo ordine non può basarsi che su una formulazione non classica della logica elementare.

Per una tale presentazione ci si varrà di alcune idee di Hilbert.

Per dimostrare la consistenza dell'aritmetica, Hilbert pensava di poter utilizzare una strategia finitista e aveva approntato a tal fine un metodo di eliminazione dei quantificatori. Poiché le sue speranze sono state spazzate via dal teorema di Gödel, tale metodo, divenuto inutile, è caduto in discredito. Benché talvolta utilizzato ancora in modo sporadico (per esempio da Bourbaki nelle sue prime pagine), esso non è piú che una curiosità storica del «museo immaginario» matematico. Tuttavia, come si vedrà, tale metodo permette in modo molto economico di spiegare lo statuto logico-concettuale dell'infinitesimale.

Hilbert sosteneva la tesi che per «fondare» le matematiche occorresse dimostrare la loro consistenza formale – e innanzitutto la consistenza dell'aritmetica – facendo uso soltanto di una metalogica finita, l'unica che poteva venir considerata come legittima a priori. Ciò pone un immediato problema relativo alla quantificazione. Finché ci si attiene a insiemi finiti, gli enunciati quantificati sono equivalenti a disgiunzioni o congiunzioni finite di enunciati elementari. Se per esempio $F(x)$ è un predicato il cui dominio di definizione è l'insieme finito $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, l'esistenziale $\exists x F(x)$ è equivalente alla disgiunzione finita $F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_n)$: a_1 soddisfa F, o a_2 soddisfa F, o ecc.; e l'universale $\forall x F(x)$ alla congiunzione finita $F(a_1) \wedge \ldots \wedge F(a_n)$: a_1 e a_2 e ... e a_n soddisfano F. Le cose vanno diversamente se A è infinito. Quantificare su un insieme infinito non è piú un processo finitista e non può piú, per Hilbert, essere accettato a priori. Occorre dunque essere in grado di eliminare i quantificatori almeno dagli assiomi delle teorie di cui ci si propone di dimostrare la consistenza.

Eliminare i quantificatori non vuol dire vietarli; in tal caso infatti ci si confinerebbe in una logica troppo povera. Vuol semplicemente dire che essi non devono piú essere considerati come nozioni logiche primitive ma al contrario che bisogna derivarli nel quadro di un formalismo che soddisfi le condizioni restrittive di una strategia finitista.

La principale fra queste condizioni restrittive è quella che impone di limitarsi a manipolazioni logiche elementari su enunciati elementari di tipo $F(a)$, $G(a,b)$, ecc. Poiché il procedimento di Hilbert è puramente sintattico, i simboli di individui a, b, ecc. non hanno né condizioni restrittive semantiche, né condizioni restrittive referenziali. Ciò consente a Hilbert di optare per una strategia di estensione dell'universo degli oggetti. Per ogni predicato a un posto $F(x)$ egli introduce – in modo puramente sintattico – un simbolo indicato con $\varepsilon_x F(x)$ (che si noterà qui ε_F per comodità) in cui x diventa una variabile vincolata. Tale ε-termine ε_F è un simbolo di individuo e non un simbolo di variabile: rappresenta l'idea di un individuo che soddisfa F.

Hilbert definisce allora il quantificatore esistenziale con l'equivalenza:

$$(11) \qquad \exists x F(x) \equiv F(\varepsilon_F).$$

L'affermazione 'Esiste un elemento che soddisfa F' equivale all'altra 'L'individuo *ideale* che rappresenta l'idea di un individuo che soddisfa F, soddisfa effettivamente F'.

Si osserverà che in questa definizione – chiave di volta del metodo hilbertiano – un enunciato complesso (quantificato) viene sostituito da un enunciato elementare il quale attesta che un determinato individuo soddisfa una determinata proprietà.

Ora se $F(x,y)$ è un predicato a due posti, $\varepsilon_x F(x,y)$ è un predicato a un posto, con y variabile libera. È dunque possibile formare l'ε-termine $\varepsilon_y \varepsilon_x F(x,y)$, ecc. Siccome la quantificazione universale si riporta per negazione alla quantificazione esistenziale, si possono in tal modo eliminare i quantificatori con l'aggiunta di ε-termini.

Hilbert considera allora il calcolo C_ε, usualmente detto ε-calcolo, costituito dalle parti seguenti:

a) calcolo delle proposizioni (simboli p, q, ... di proposizioni e operatori logici di congiunzione $\wedge$, disgiunzione $\vee$, negazione $\sim$);
b) simboli di individui e simboli di variabili;
c) simboli di predicati a n posti;
d) ε-termini corrispondenti;
e) regole standard di deduzione;
f) regola d'introduzione dell'operatore ε:

(12) $$F(a) \Rightarrow F(\varepsilon_F):$$

poiché F è un predicato a un posto, se si è dimostrato che un elemento particolare, a, soddisfa F, si può introdurre l'ε-termine ε_F e porre $F(\varepsilon_F)$. Per la (11) questa regola non è nient'altro che la riformulazione della regola classica d'introduzione del quantificatore esistenziale.

(13) $$F(a) \Rightarrow \exists x F(x).$$

Quantunque non contenga esplicitamente quantificatori, C_ε è, per la (11), una estensione del calcolo dei predicati CP. Ma...

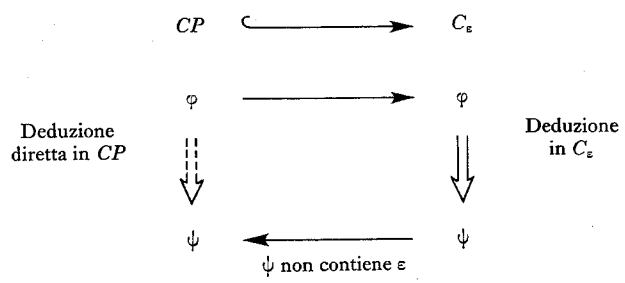


Figura 7.
Schema del teorema di Hilbert.

TEOREMA (Hilbert). *C_ε è una estensione inessenziale di CP. Ciò significa che se φ è una formula di CP e ψ una conseguenza di φ in C_ε, se il simbolo ε non interviene in modo irriducibile in ψ, allora ψ è una conseguenza di φ in CP.* (Cfr. fig. 7).

Questo risultato è di grande importanza perché mostra che i calcoli CP e C_ε sono sintatticamente equivalenti e che dunque non c'è alcuna ragione di privilegiare l'uno in rapporto all'altro.

Ma se CP e C_ε sono sintatticamente equivalenti, le loro semantiche naturali sono al contrario molto differenti e in particolare per quanto riguarda il problema della referenza.

La semantica del calcolo dei predicati CP è infatti puramente estensionale. I «nomi» a, b, ecc. degli individui sono in essa arbitrari e la quantificazione viene interpretata in termini di «prospezione». Al contrario in C_ε la quantificazione (esistenziale) s'interpreta come una proprietà di *consistenza* di un individuo ideale, di una identità simbolica. Tradizionalmente, si considera l'operatore di Hilbert come un operatore *di scelta*: poiché l'ε-termine ε_F rappresenta, secondo il concetto, l'idea di un elemento che soddisfa F e, secondo il referente, un elemento arbitrario che soddisfa F, se X_F è l'insieme degli elementi che soddisfano F, si può dire che l'operatore ε *seleziona* un elemento arbitrario a di X_F come referente di ε_F. Se $F(\varepsilon_F)$ è valido, allora $F(a)$ è valido, a soddisfa F, X_F è non vuoto ed esiste certamente un elemento che soddisfa F.

Tuttavia si vede che se l'equivalenza fondamentale (11) è consistente, ciò non è che a causa dello statuto logico-sintattico ben preciso degli ε-termini. Ipostasi di idee, gli ε-termini sono nello stesso tempo dei simboli secondo il concetto e degli indici secondo il referente. Elementi di codice determinati il cui referente è indeterminato, si può dire che essi sono strutturati come simboli-indice. Proprio a questa intrusione metodica nel campo della logica formale di entità che hanno lo statuto «linguistico» di simboli-indice, l'operatore hilbertiano deve la sua portata epistemologica.

Si prenda allora in considerazione una proposizione *universale* di tipo $\forall x F(x)$. Denotando $\sim F$ con $\tilde{F}$, si hanno le equivalenze

(14) $$\begin{cases} \forall x F(x) \equiv \sim \exists x \tilde{F}(x) & \text{(dualità } \forall \leftrightarrow \exists \text{ tramite la negazione)} \\ \exists x \tilde{F}(x) \equiv \tilde{F}(\varepsilon_{\tilde{F}}) & \text{(per la (11))} \\ \sim \exists x \tilde{F}(x) \equiv \sim \tilde{F}(\varepsilon_{\tilde{F}}) & \end{cases}$$

e, poiché $\sim \tilde{F} = F$,

(15) $$\forall x F(x) \equiv F(\varepsilon_{\tilde{F}}).$$

Si supponga che $\forall x F(x)$ sia valido in una interpretazione data. L'ε-termine $\varepsilon_{\tilde{F}}$, detto quindi termine-zero (*null term*), esiste sempre per ipotesi ma possiede uno statuto molto particolare. Siccome non esistono elementi che soddisfano $\tilde{F}$, $\varepsilon_{\tilde{F}}$ è infatti proprio un simbolo-indice *senza referente consistente*. La

(15) esprime che *ogni* referente di $\varepsilon_{\tilde{F}}$ *nega* il significato che simbolizza in quanto significante. Un termine-zero è dunque un simbolo-indice «dimezzato» per cui l'aspetto di simbolo e l'aspetto di indice sono incompatibili, è la traccia letterale di una disgiunzione tra significante e significato, una finzione che implica un sovvertimento della referenza.

Dunque l'operatore di Hilbert rende in un certo senso la contraddizione *operatoria*. Mostra che a livello logico-concettuale ogni universale è de-limitato da un «effetto paradossale». E siccome per il teorema di Hilbert i calcoli CP e C_ε sono sintatticamente equivalenti, questi effetti parassitari, queste «impurità di origine», non sono eliminabili che attraverso una censura ideologica che privilegia l'interpretazione estensionale della logica elementare.

Introducendo la nozione intuitiva di «posto» è possibile approfondire queste riflessioni:

1) L'esistenziale $\exists x F(x) \equiv F(\varepsilon_F)$ esprime che il simbolo-indice ε_F è localizzato «al suo posto», cioè che va nel posto determinato dal predicato F che esso stesso indica.

2) L'universale $\forall x F(x) \equiv F(\varepsilon_{\tilde{F}})$ esprime al contrario che il simbolo-indice dimezzato $\varepsilon_{\tilde{F}}$ è *delocalizzato*, che esso «non è al suo posto» o ancora che è «catturato» dal posto del predicato stesso che lo nega. Parallelamente all'interpretazione «statica» di un termine-zero come disgiunzione significante/significato, esiste un'interpretazione «dinamica» che ne fa la traccia letterale di un evento ideale di delocalizzazione o di biforcazione.

Si può dunque sostenere la tesi che, malgrado la sua semplicità, il formalismo hilbertiano è «fondato nella realtà» e materializza nel campo della logica l'eterogeneità tra il simbolico e il reale che è inerente al concetto. Il feticismo della referenza consiste nel banalizzare nell'immaginario ciò che esso può avere di fittizio una volta interpretato, laddove, al contrario, esso iscrive al livello logico-simbolico il funzionamento *dialettico* naturale del concetto.

Si torni ora all'infinitesimale e si prenda in considerazione l'enunciato $F(0)$:

(16) $$F(0) \equiv \forall y (y \neq 0 \Rightarrow \exists r\, (r > 0 \wedge |y| > r))$$

che, una volta interpretato in **R**, significa che non esistono infinitesimi: la (16) asserisce infatti che per ogni numero reale y non nullo esiste un numero reale positivo r tale che $|y| > r$ (cioè, y è separato da 0 da una distanza finita). $F(0)$ ha la forma $\forall y G(y)$ e dunque per la (15) è equivalente a $G(\varepsilon_{\tilde{G}})$. Si prenda dunque in considerazione il termine-zero $\varepsilon_{\tilde{G}}$. Poiché G è di forma $A \Rightarrow B$, $\tilde{G}$ sarà di forma $A \wedge \tilde{B}$:

(17) $$\tilde{G}(y) \equiv (y \neq 0) \wedge \forall r\, (r > 0 \Rightarrow |y| \leq r).$$

$\varepsilon_{\tilde{G}}$ rappresenta dunque *l'idea* di un numero differente da 0 la cui distanza da 0 è minore di qualunque numero strettamente positivo. *Ma questa è proprio la definizione dell'infinitesimale leibniziano.* Di qui:

(18) $$dx \equiv \varepsilon_{\tilde{G}}.$$

Non deve dunque stupire che si siano individuati a proposito del dx leibniziano tutti i tratti caratteristici di un termine-zero. In particolare l'interpretazione di d'Alembert dell'infinitesimale in termini di evento (cfr. sopra, p. 453) non fa che metaforizzare in modo «fisico» l'evento di *biforcazione* attraverso cui il termine-zero dx non è *strutturalmente* al suo posto (delocalizzazione).

Una volta che si disponga della finzione dx, l'universale (16) equivalente a $G(\varepsilon_{\tilde{G}})$ si traduce con:

(19) $$dx \neq 0 \Rightarrow \exists r\, (r > 0 \wedge |dx| > r):$$

ogni infinitesimale è *o nullo o finito*. E questo già si sapeva.

Osservazione: Ciò che precede potrà apparire circolare. Tuttavia non si tratta che di materializzare una de-limitazione di **R** come *totalità*. Ma non solo l'idea paradossale di infinitesimale è, come si è visto, un effetto logico-concettuale *dialettico e pregnante* eliminabile soltanto con una censura ideologica; tale idea permette anche di esprimere *concettualmente* una proprietà strutturale fondamentale di **R** con l'enunciato *negativo* «Non esistono infinitesimi».

Il problema delle determinazioni concettuali negative è senza dubbio cruciale. La sua archeologia porterebbe molto lontano, senz'altro fino al pensiero selvaggio. Come predicare una totalità per cui non si dispone di un procedimento effettivo di costruzione? L'interesse dell'operazione hilbertiana starebbe nell'aver mostrato che enunciati negativi che prescindono dall'esistenza (*come esige il loro concetto*) di entità contraddittorie equivalgono a enunciati quantificati positivi. Evidentemente, dal momento in cui si è avuta a disposizione una costruzione *esplicita* di **R** come infinito attuale, ci si è potuti dispensare da ogni ricorso all'infinitesimale. Ma occorre aver ben chiaro che, facendo ciò, l'analisi si è separata irreversibilmente da ogni terreno ontologico, si è privatizzata e capitalizzata tecnicamente (cfr. sopra, p. 454); essa partecipava infatti della dialettica universale interna al concetto solamente grazie alla struttura del termine-zero.

Se la determinazione del dx come termine-zero chiarisce il suo statuto logico-concettuale, tuttavia consente anche di *mediare* la spiegazione del suo statuto aritmetico e algebrico. Se infatti dx è un termine-zero, lo è solo relativamente a **R**. Dunque si può sfruttare la disgiunzione che esso fissa fra significante e significato per trovargli un referente (in modo *consistente*) all'«esterno» di **R**. Si ottiene cosí per saturazione delle operazioni una estensione ***R** di **R**. Se ora è possibile convalidare il principio di continuità mostrando che – salvo ad arricchire ***R** – **R** e ***R** sono in qualche modo equivalenti, si sarà condotti, come Leibniz, a *relativizzare* l'opposizione finito/infinito. Relativamente a **R**, dx sarà un termine-zero, ma relativamente a ***R** sarà un *segno* (coesione significante/significato). $F(0)$ (si veda la (16)) sarà valido in ***R** per il fatto che è valido in **R**: non ci sono infinitesimi assoluti, ma solo relativi. Se si quantifica su **R** per definire dx (si veda la (18)), dx può trovare un referente (in modo consistente) in ***R**. Se si quantifica su ***R** per definire dx, allora dx ridiventa un

simbolo-indice «dimezzato», inconsistente relativamente sia a **R** sia a ***R**, e che inoltre ha un referente solo in una estensione ****R** di ***R**. Si può dunque anticipare la struttura di una estensione non standard ***R** di **R**; resta, ovviamente, il problema di mostrare che un'estensione del genere esiste effettivamente.

***R** deve essere ottenuta a partire da **R** per aggiunta di infinitesimi e per saturazione delle operazioni: sarà dunque costituita da tre componenti: 1) l'insieme **R** dei numeri reali, detti, per tale occasione, standard; 2) un insieme μ di infinitesimi che contiene solo 0 come numero standard; dx è il suo simbolo-indice; 3) l'insieme $\mathbf{R}_\infty$ dei numeri «infiniti»; sono gli inversi degli infinitesimi.

Data l'invarianza per traslazione di **R**, la parte finita di ***R**, $*\mathbf{R}_f = *\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_\infty$, sarà ottenuta associando a ogni $x \in \mathbf{R}$ l'insieme μ degli infinitesimi: $*\mathbf{R}_f$ è «fibrato» su **R** di fibra in x: l'insieme $x+\mu$ ha come simbolo-indice $x+dx$ (fig. 8).

***R** deve essere «indiscernibile» da **R**, cioè deve possedere esattamente le stesse proprietà di **R** purché queste siano esprimibili in un certo linguaggio di base. In particolare ***R** sarà, come **R**, un corpo ordinato «archimedeo». Ciò non è contraddittorio col fatto che esistono numeri «infiniti» in ***R** (col fatto cioè che ***R** non è archimedeo nel senso stretto del termine). Questo significa che ***R** è archimedeo *non relativamente a* **N**, *ma relativamente a* ***N**, insieme degli interi di **R** che comprende interi «infiniti».

Ogni entità definita a partire da **R** deve essere *automaticamente* (cioè in virtú della stessa costruzione di ***R**) prolungabile a una entità dello stesso ordine definita a partire da ***R**.

È un programma di tal genere che ha portato a termine l'analisi non standard. Come afferma Fenstadt: «Leibniz era dell'idea che gli infinitesimi e il loro calcolo potessero essere giustificati con l'introduzione di un tipo di *elementi ideali* che potevano essere o infinitamente piccoli o infinitamente grandi rispetto ai numeri reali. Ma Leibniz e i suoi successori, in particolare L'Hôpital, non erano in grado di sviluppare in modo consistente un'analisi basata su queste idee. L'introduzione di ***R** realizza invece tutto ciò, ***R** è un'estensione elementare di **R** che possiede le stesse proprietà aritmetiche. E la teoria evita le difficoltà connesse con il tentativo di Leibniz, distinguendo accuratamente ciò che "è uguale" da ciò che "è infinitamente vicino a". Per un infinitesimo dx e un corrispondente dy, abbiamo $f'(x) \sim (dy/dx)$ cosí che $f'(x) = st(dy/dx)$, laddove Leibniz voleva avere $f'(x) = dy/dx$, che è chiedere troppo» [1968, pp. 39-40].

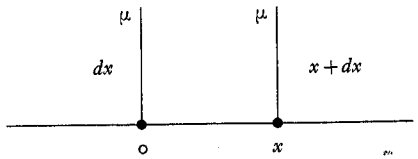


Figura 8.
Schema: la parte finita di ***R**.

Ma l'analisi non standard ha potuto condurre a termine tale programma solo basandosi in modo essenziale sul rapporto che sussiste tra **R** e il linguaggio formale in cui vengono espresse le sue proprietà. Lo studio di tale rapporto tra sintassi (linguaggio formale) e semantica (struttura concreta) è noto in logica sotto il nome di teoria dei modelli.

2. *Elementi di teoria dei modelli.*

2.1. La dialettica sintassi/semantica.

La teoria dei modelli analizza i rapporti esistenti tra una struttura matematica concreta e la sua teoria (nel senso formale del termine), cioè la struttura dell'insieme degli enunciati che essa soddisfa. La teoria dei modelli si poggia su una dialettica sintassi/semantica dove la sintassi rappresenta la parte linguistica e formale e la semantica la parte insiemista e concreta.

Si consideri per esempio il corpo **R** dei numeri reali che si suppone costruito esplicitamente come infinito attuale: viene inteso come un oggetto concreto. Quando poi si dice che **R** è un corpo topologico commutativo, totalmente ordinato, archimedeo e completo, si dice con questo che tale oggetto concreto è dotato di una particolare struttura, anzi, di piú strutture tra loro combinate: 1) di una struttura algebrica definita dalle operazioni di addizione $(+)$ e di moltiplicazione $(\cdot)$; 2) di una struttura di ordine definita dalla relazione d'ordine $<$; 3) da una struttura topologica $\mathcal{T}$.

Come struttura, **R** è dunque la quintupla

$$\mathcal{R} = \langle \mathbf{R}, +, \cdot, <, \mathcal{T} \rangle.$$

Ora, siccome non c'è intuizione che permetta di conoscere questa struttura in modo immediato, per comprenderla si deve spiegarne in modo mediato (cioè con l'ausilio di dimostrazioni) la descrizione predicativa. Si parte da proprietà date per acquisite per giungere, attraverso un certo itinerario deduttivo, ad altre proprietà. Ma poiché la deduzione è puramente sintattica e algoritmica si devono prima tradurre in un linguaggio formale appropriato gli enunciati presi in considerazione. Si introduce cosí una distinzione tra linguaggio formale e struttura concreta, cioè tra sintassi e semantica.

In altri articoli della presente *Enciclopedia* sono trattati gli aspetti specifici della formalizzazione, del calcolo logico, della deduzione. Qui, per «parlare» delle strutture, verrà brevemente delineato il linguaggio L dei predicati composto da:

a) un insieme numerabile di simboli di variabile, x, y, z, ecc.;
b) un insieme numerabile di costanti a, b, c, ecc. che consentono di designare degli elementi strutturalmente distinti come 0, 1, ecc.;
c) il simbolo di uguaglianza;
d) un insieme numerabile di simboli di relazioni (un*arie*, bin*arie*, tern*arie*, ecc.) F, G, P, Q, ecc., che possiedono ciascuna una *arietà* definita;

e) eventualmente un insieme numerabile di simboli di funzione o di operazione;
f) simboli di punteggiatura;
g) connettivi proposizionali $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;
h) quantificatori $\exists$, $\forall$.

Tra tutte le catene di simboli di L, ci si restringe alle espressioni ben formate, cioè tipograficamente corrette e che non introducono confusione di variabili nella quantificazione. Vengono chiamate formule (ben formate) di L. Sono definite ricorsivamente a partire dalle formule elementari di base – dette formule atomiche – del tipo $x=y$, $P(x_1, ..., x_n)$, $f(x_1, ..., x_n)=z$ (ove P è una relazione n-aria, f una funzione di n variabili, $x, y, z, x_1, ..., x_n$ delle variabili o delle costanti) mediante la regola che segue:

REGOLA. Se φ e ψ sono delle formule e x una variabile, allora $\sim\varphi$, $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\exists x\varphi$ sono delle formule (a condizione che per $\exists x\varphi$, φ non contenga già una quantificazione su x).

Come è noto, si può definire $\forall$ in termini di $\sim$ e di $\exists$ e i connettivi $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ in termini di $\sim$ e $\wedge$, o di $\sim$ e $\vee$.

Si dicono enunciati le formule senza variabili libere cioè le formule in cui tutte le variabili sono quantificate. Soltanto gli enunciati possono avere un valore di verità una volta interpretati semanticamente.

Per trasformare in calcolo il linguaggio dei predicati occorre disporre da una parte di un insieme di assiomi logici e dall'altra di un insieme di regole di deduzione.

L'insieme degli assiomi comprende 1) gli assiomi del calcolo proposizionale; 2) gli assiomi dell'uguaglianza: l'uguaglianza è una relazione di equivalenza che soddisfa lo schema di assioma di sostituzione

(1) $\forall x \forall y\ (x=y \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi'))$,

dove φ è una formula e φ' si ottiene a partire da φ sostituendovi con y un numero arbitrario di occorrenze di x; 3) gli assiomi di particolarizzazione del quantificatore universale e d'introduzione del quantificatore esistenziale:

(2) $\forall x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)$

(3) $\varphi(a) \Rightarrow \exists x\varphi(x)$.

Quanto all'insieme delle regole di deduzione, esso comprende, fra le altre, le seguenti:

REGOLA DEL «MODUS PONENS». Se φ e $\varphi\Rightarrow\psi$ sono dei teoremi, allora ψ è un teorema.

REGOLA. Se $\varphi\Rightarrow\psi(a)$ è un teorema e se φ non contiene la costante a, allora $\forall x\psi(x)$ è un teorema.

REGOLA. Se $\varphi(a)\Rightarrow\psi$ è un teorema e se ψ non contiene la costante a, allora $\exists x\varphi(x)\Rightarrow\psi$ è un teorema.

Prendendo gli assiomi come teoremi di base si costruisce dunque ricorsivamente, per applicazione ripetuta di queste regole, un insieme di formule di L dette teoremi del calcolo CP dei predicati, o dette ancora formule derivabili, dimostrabili o deducibili, indicate di norma con $\vdash\varphi$. A questi teoremi puramente logici (indipendenti da ogni semantica) si può ricorrere costantemente.

Piú in generale sia Σ un insieme di formule di CP. Si dice che la formula φ è derivabile da Σ e si indica con $\Sigma\vdash\varphi$, se φ può essere ottenuta da una catena deduttiva che fa intervenire come teoremi di base non soltanto gli assiomi di CP ma anche le formule di Σ (o ipotesi). Nella pratica piú che dimostrare $\Sigma\vdash\varphi$ si vorrebbe dimostrare $\vdash\Sigma\Rightarrow\varphi$. Che queste due proprietà siano equivalenti nel caso degli enunciati è contenuto nel teorema seguente:

TEOREMA DI DEDUZIONE (Herbrand, 1928). *Se Σ è un insieme finito di enunciati e se φ è un enunciato, $\Sigma\vdash\varphi$ implica $\vdash\Sigma\Rightarrow\varphi$.*

Osservazione: $\vdash\Sigma\Rightarrow\varphi$ implica $\Sigma\vdash\varphi$ è la regola del *modus ponens* enunciata sopra.

Osservazione: Il teorema di deduzione è falso per le formule in generale.

Si ritorni ora alla semantica. Sia $\mathcal{A}=\langle A, R_1, ..., R_p\rangle$ una struttura definita su un insieme di base A dalle relazioni $R_1, ..., R_p$ (o dalle funzioni e dalle operazioni: com'è noto, se $f: A^n\rightarrow A$ è una operazione $f(x_1, ..., x_n)=z$, le si associa la relazione R_f definita da $(x_1, ..., x_n, x_{n+1})\in R_f$ se e solo se $f(x_1, ..., x_n)=x_{n+1}$). Per «parlare» di $\mathcal{A}$ si utilizza il calcolo dei predicati. In L viene selezionato un insieme $R'_1, ..., R'_p$ di simboli di relazione con la stessa arietà rispettivamente di $R_1, ..., R_p$. La corrispondenza biunivoca $R'_i\rightarrow R_i$ viene detta una interpretazione di L in $\mathcal{A}$, o anche una semantica.

Ma per poter interpretare gli enunciati di L in $\mathcal{A}$, occorre ancora dare regole per l'interpretazione delle variabili e delle costanti.

Per quanto riguarda le variabili, si introduce la seguente idea fondamentale.

Anche se al livello della loro costruzione dal punto di vista insiemistico gli elementi di A non sono degli elementi semplici ma a loro volta degli insiemi (come per esempio nel caso dei numeri reali nella costruzione di Dedekind o delle funzioni di uno spazio funzionale) li si considera come elementi semplici (*Urelemente* o atomi). Nell'universo della teoria degli insiemi che governa l'aspetto semantico, si tronca la gerarchia associata alla relazione di appartenenza al livello degli elementi della struttura presa in considerazione e si pone che le variabili di L sono riferite a questi *Urelemente*.

Si restringe allora la quantificazione agli elementi delle strutture (per esempio viene vietata la quantificazione sui sottoinsiemi di A). Questa restrizione definisce cioè la cosiddetta logica dei predicati del primo ordine. I teoremi fondamentali della teoria dei modelli dipendono in modo essenziale da tale restrizione.

Parlare di una struttura al primo ordine vuol dire dunque considerare di essa soltanto le proprietà formulabili in un linguaggio dalle risorse ben limitate. In rapporto al calcolo dei predicati adattato alla teoria generale degli insiemi

(teoria dei tipi alla Russell), questo fatto introduce una rottura. Ma proprio tale rottura offre strumenti per l'indagine del rapporto tra sintassi e semantica.

Per le costanti si adotta la seguente strategia. I simboli di costanti di L sono riferiti a elementi strutturalmente distinti. Per parlare per esempio di **R** occorre disporre di simboli che denotino 0 e 1. A seconda della scelta degli elementi distinti, si ottengono teorie non equivalenti. Per esempio la teoria di **R** in cui è disponibile, oltre a 0 e 1, anche il simbolo di costante π, è piú ricca della teoria in cui sono disponibili soltanto 0 e 1.

È però una pratica abituale quella d'introdurre un simbolo nuovo ogni volta che viene definito un nuovo elemento. Affinché questa procedura sia sempre lecita, talvolta si conviene di prendere come linguaggio di base relativo a una struttura $\mathcal{A}$ il linguaggio L_A (o $L_{\mathcal{A}}$) ottenuto aggiungendo a L dei «nomi» per *tutti* gli elementi dell'insieme A base di $\mathcal{A}$. L'insieme delle costanti di $L_{\mathcal{A}}$ in generale non è numerabile.

Se si dispone di una interpretazione di L in $\mathcal{A}$ ogni enunciato del primo ordine relativo ad $\mathcal{A}$ è traducibile in un enunciato formale di L e reciprocamente ogni enunciato di L è interpretabile come enunciato del primo ordine relativo ad $\mathcal{A}$.

Dopo avere interpretato L in $\mathcal{A}$, vi si interpreti il calcolo dei predicati. La nozione di base è quella (semantica) di validità di un enunciato.

DEFINIZIONE. *Un enunciato φ di $L_{\mathcal{A}}$ è valido in $\mathcal{A}$ se è vero una volta interpretato.*

DEFINIZIONE. *Se φ è valido in $\mathcal{A}$ (e si indica con $\mathcal{A} \models \varphi$) si dice che $\mathcal{A}$ è un modello di φ.*

Piú generalmente se Σ è un insieme di enunciati e se $\mathcal{A} \models \varphi$ per ogni enunciato φ di Σ, si dice che $\mathcal{A}$ è un modello di Σ. La validità si definisce ricorsivamente in modo evidente.

Si definirà ora la nozione di teoria nel suo doppio aspetto sintattico e semantico.

Lato sintattico: sia Σ un insieme consistente di enunciati, cioè un insieme di enunciati da cui non è possibile derivare una contraddizione; Σ è detta allora una teoria.

DEFINIZIONE. *Si chiama poi teoria di Σ, e si indica con* $\mathrm{Th}(\Sigma)$, *l'insieme degli enunciati derivabili da Σ (cioè la chiusura deduttiva di Σ).*

Verrà indicata con $\mathfrak{M}(\Sigma)$ la classe dei modelli di Σ, cioè la classe delle strutture per cui esiste un'interpretazione di L che rende validi gli enunciati di Σ.

Lato semantico: sia data una struttura $\mathcal{A}$:

DEFINIZIONE. *Si chiama teoria di $\mathcal{A}$, e si indica con* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, *l'insieme degli enunciati validi in $\mathcal{A}$. Per definizione $\mathcal{A}$ è un modello di* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$.

Piú in generale: sia K una classe di strutture dello stesso tipo (cioè definite dagli stessi simboli di costante e dagli stessi simboli di relazione).

DEFINIZIONE. *Si chiama teoria di K e si indica con* $\mathrm{Th}(K)$ *l'insieme degli enunciati validi in ogni struttura $\mathcal{A}$ di K.*

L'analisi del rapporto fra sintassi e semantica consiste per prima cosa nel domandarsi: 1) Dato un insieme di enunciati Σ, che rapporto c'è fra $\mathrm{Th}(\Sigma)$ e $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}(\Sigma))$, cioè tra l'insieme degli enunciati derivabili da Σ e l'insieme degli enunciati validi in ogni modello di Σ? 2) Data una struttura $\mathcal{A}$, esiste un insieme finito di enunciati Σ tale che $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\Sigma)$ cioè tale che ogni enunciato valido in $\mathcal{A}$ sia derivabile da Σ? Si dice in questo caso che $\mathcal{A}$ e la sua teoria sono finitamente assiomatizzabili. 3) Siano $\mathcal{A} = \langle A, R_i \rangle$, $\mathcal{B} = \langle B, S_i \rangle$ due strutture dello stesso tipo. Si supponga $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$. Ciò vuol dire allora che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono isomorfe? Non necessariamente. Nel caso in cui questo si verifica si dice che la teoria di $\mathcal{A}$ è categorica.

L'idea ingenua che ci si forma del rapporto di adeguazione tra sintassi e semantica indurrebbe a ritenere che, data una struttura concreta $\mathcal{A}$, la sua teoria dovesse essere al tempo stesso categorica e finitamente assiomatizzabile, ovvero che esiste un numero finito di proprietà caratteristiche di $\mathcal{A}$ tali che 1) ogni proprietà di $\mathcal{A}$ è derivabile da queste; 2) ogni struttura che possiede queste proprietà è isomorfa a $\mathcal{A}$.

Nel seguito si vedrà come questa idea sia definitivamente falsa al primo ordine e come esista uno scarto fra sintassi e semantica che può essere analizzato in quanto tale.

Prima di affrontare i teoremi di base che consentono una tale analisi, ecco una prima forma dell'adeguazione fra sintassi e semantica.

Gli enunciati di una teoria $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ si suddividono in due classi: da una parte gli enunciati che dipendono dalla struttura particolare di $\mathcal{A}$ e dall'altra quelli che ne sono indipendenti. In relazione a questi ultimi, si ha innanzitutto la definizione seguente:

DEFINIZIONE. *Un enunciato è detto universalmente valido se è valido in ogni interpretazione.*

Per rispondere alla domanda 1), occorre, prima di analizzare particolari insiemi di enunciati, prendere in considerazione il caso $\Sigma = \emptyset$. $\mathrm{Th}(\Sigma)$ si riduce allora all'insieme dei teoremi di CP e $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}(\Sigma))$ all'insieme degli enunciati universalmente validi (poiché ogni struttura è modello dell'insieme vuoto di enunciati).

Domanda: Quale rapporto c'è fra i teoremi di CP e gli enunciati universalmente validi?

Siccome è banale verificare che gli assiomi di CP sono universalmente validi e che le regole di deduzione conservano la validità universale, si può mostrare facilmente un primo risultato:

TEOREMA. *Ogni enunciato che è un teorema di CP è universalmente valido: se $\vdash \varphi$, allora $\mathcal{A} \models \varphi$ per ogni struttura $\mathcal{A}$.*

Questo teorema ha per corollario il seguente risultato di base:

TEOREMA DI CONSISTENZA DEL CALCOLO DEI PREDICATI. *CP è consistente cioè* $\Sigma = \emptyset$ *è un insieme consistente di enunciati.*

2.2. I teoremi di base della teoria dei modelli.

I teoremi di base della teoria dei modelli si dividono in due gruppi. Da una parte quelli che dimostrano risultati positivi di compatibilità fra sintassi e semantica e dall'altra quelli che dimostrano risultati negativi di limitazione interna. In generale la restrizione al primo ordine è essenziale.

Teoremi positivi. Il teorema di completezza di Gödel [1930] è il reciproco del teorema di p. 471:

TEOREMA (Gödel, 1930). *Ogni enunciato universalmente valido è un teorema di CP: se* $\mathcal{A} \models \varphi$ *per ogni interpretazione di* φ, *allora* $\vdash \varphi$.

A questo teorema, come è noto, può essere data una forma piú forte:

TEOREMA. *Un insieme di enunciati è consistente se e solo se ammette un modello.*

La dimostrazione classica del teorema di completezza è troppo tecnica per essere anche soltanto abbozzata in questa sede [il lettore è rimandato, per esempio, a Bell e Slomson 1969 e Robinson 1963]. Piú oltre se ne darà una versione diversa.

Eccone comunque alcune conseguenze fondamentali: si può già dare risposta a domande come la 1) di p. 471.

PROPOSIZIONE. Sia Σ un insieme consistente di enunciati e sia K una classe di strutture dello stesso tipo. Si ha:

1) $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}(\Sigma)) = \mathrm{Th}(\Sigma)$
2) $\mathfrak{M}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}(\Sigma))) = \mathfrak{M}(\Sigma)$
3) $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}(\mathrm{Th}(K))) = \mathrm{Th}(K)$.

Un'altra conseguenza del teorema di completezza è il teorema fondamentale di esistenza dei modelli:

TEOREMA DI COMPATTEZZA. *Sia* Σ *un insieme di enunciati. Se ogni sottoinsieme finito* Σ_f *di* Σ *ammette un modello, allora* Σ *ammette un modello.*

Dimostrazione: Se Σ non ammettesse un modello, sarebbe inconsistente per il teorema presentato sopra. Un Σ_f sarebbe allora inconsistente e perciò senza modello. Contraddizione.

Osservazione: Si vedrà nel seguito come rendere costruttiva questa dimostrazione astratta.

COROLLARIO. Sia Σ una teoria. Una struttura $\mathcal{A}$ può essere immersa in un modello di Σ se e solo se ogni sottostruttura finita di $\mathcal{A}$ può essere immersa in un modello di Σ.

Un'altra conseguenza del teorema di completezza ha una maggiore rilevanza epistemologica. Come osservano Bell e Slomson [1969, pp. 65-66], dopo Kreisel [1967, p. 153], la funzione essenziale del calcolo dei predicati è di provare a «catturare» sintatticamente non tanto la nozione di enunciato universalmente valido, quanto quella di enunciato logicamente valido, cioè valido in ogni interpretazione, incluse le interpretazioni in ogni universo della teoria degli insiemi (universi che *non* sono insiemi). Va sottolineato come a priori l'insieme degli enunciati logicamente validi contenga quello degli enunciati che sono teoremi del calcolo *CP* dei predicati e sia contenuto in quello degli enunciati universalmente validi. Il teorema di completezza di Gödel afferma proprio che questi tre insiemi sono identici.

Teoremi di limitazione. Il piú noto è certamente il teorema di incompletezza [Gödel 1931], che si richiama qui nelle linee essenziali. Anzitutto: un linguaggio L (non necessariamente del primo ordine), in cui si esprime l'identità, viene usualmente detto sufficientemente potente se è in grado di esprimere l'aritmetica elementare. Il risultato gödeliano si può allora esprimere cosí: 1) se si richiede che l'insieme degli assiomi specifici di un sistema formale sia decidibile (ossia che sia sempre possibile decidere *in modo effettivo* – cioè con mezzi puramente costruttivi – per ogni formula (ben formata) del linguaggio in questione se si tratta o meno di un assioma), allora non può esistere un sistema formale del primo ordine (e neanche di ordine superiore) consistente e sufficientemente potente nel quale tutti gli enunciati veri della matematica, esprimibili nel sistema, siano teoremi; 2) la consistenza (o non-contraddittorietà) di un sistema del primo ordine (e neanche di ordine superiore) consistente e sufficientemente potente non può venir dimostrata entro il sistema stesso. Da questa stessa formulazione segue immediatamente che, per sistemi di ordine superiore al primo, viene meno quella forma di adeguazione della sintassi alla semantica di cui si è parlato sopra.

Ma pure al primo ordine sussiste uno scarto tra sintassi e semantica che concerne la questione della categoricità. Sussiste infatti, per teorie al primo ordine, il seguente teorema:

TEOREMA (Löwenheim-Skolem, prima versione [cfr. Löwenheim 1915; Skolem 1920]). *Sia* Σ *una teoria che possiede un modello infinito. Se* Σ *è finito,* Σ *ha un modello per ogni cardinale infinito. Se* Σ *è infinito di cardinale* α, Σ *ha un modello per ogni cardinale* $\geq \alpha$.

Questo teorema è qui decisivo: è infatti il teorema generale di esistenza dei modelli non standard: esistono modelli della teoria (al primo ordine) di $\mathbf{R}$ per ogni cardinale superiore alla potenza del continuo.

Sotto il profilo generale il teorema di Löwenheim-Skolem mostra che teorie che ammettono modelli infiniti (cioè la maggior parte delle teorie interessanti) sono non categoriche in quanto due strutture con cardinali differenti non sono isomorfe: la risposta alla domanda 3) di p. 471 è in generale negativa. Occorre di conseguenza relativizzare la nozione di categoricità.

DEFINIZIONE. *Sia α un cardinale. Una teoria Σ è detta α-categorica se tutti i modelli di Σ di cardinale α sono isomorfi.*

Alcuni teoremi classici sono teoremi di α-categoricità.

Si consideri per esempio la teoria Σ_D degli insiemi densamente ordinati senza primo ed ultimo elemento. Se $\mathcal{A}=\langle A, <\rangle$ è un insieme totalmente ordinato, la proprietà di densità esprime che per ogni coppia (x, y) di elementi di $\mathcal{A}$ tale che $x<y$, esiste un elemento intermedio $x<z<y$.

TEOREMA (Cantor, 1895). *Σ_D è $\aleph_0$-categorica (ove $\aleph_0$ è la potenza del numerabile).*

COROLLARIO. Tutti gli insiemi numerabili $\mathcal{A}=\langle A, <\rangle$ densamente ordinati senza primo ed ultimo elemento sono isomorfi a $\langle \mathbf{Q}, <\rangle$.

Osservazione: È possibile dimostrare che Σ_D non è α-categorica per $\alpha>\aleph_0$.

Si consideri ora la teoria Σ_{CC} dei corpi commutativi algebricamente chiusi. I modelli di Σ_{CC} soddisfano un numero *infinito* di assiomi: quelli finiti dei corpi commutativi e, per ogni $n\in\mathbf{N}$, l'assioma τ_n che esprime che ogni polinomio di grado n possiede una radice.

Osservazione: È possibile mostrare che non si può ricondurre l'insieme infinito dei τ_n a un insieme finito. La proprietà di essere algebricamente chiuso *non è*, per un corpo, una proprietà del primo ordine, o ancora, la teoria Σ_{CC} *non è* finitamente assiomatizzabile (cfr. sopra, p. 471).

Dato un corpo commutativo K si può mostrare o che per ogni $x\in K$, $x\neq 0$ si ha $nx\neq 0$ per ogni intero $n\in\mathbf{N}$: si dice allora che K è di caratteristica 0; o che esiste un piú piccolo numero primo p tale che $px=0$ per ogni $x\in K$: si dice allora che K è di caratteristica p. Ogni corpo di caratteristica 0 (come $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$) è una estensione di $\mathbf{Q}$ e ogni corpo di caratteristica p è un'estensione del corpo finito $\mathbf{F}_p=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ degli interi modulo p. $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{F}_p$ sono detti corpi primi (cfr. l'articolo «Divisibilità» in questa stessa *Enciclopedia*).

Osservazione: La proprietà σ_p di essere di caratteristica p è, per un corpo, una proprietà del primo ordine. Al contrario la proprietà σ_0 di essere di caratteristica 0, che risulta la congiunzione infinita $\bigwedge^{p}(\sim\sigma_p)$, *non è* del primo ordine.

Sia allora Σ_{CC_p} (rispettivamente Σ_{CC_0}) la teoria dei corpi algebricamente chiusi di caratteristica p (rispettivamente di caratteristica 0).

TEOREMA (Steinitz, 1910). *Le teorie Σ_{CC_p} e Σ_{CC_0} sono α-categoriche per ogni cardinale $\alpha>\aleph_0$.*

COROLLARIO (caratterizzazione di $\mathbf{C}$). Ogni corpo algebricamente chiuso di caratteristica zero avendo la potenza del continuo è isomorfo al corpo $\mathbf{C}$ dei numeri complessi.

Osservazione: È possibile mostrare che Σ_{CC_0} non è $\aleph_0$-categorica.

Il concetto di α-categoricità si è rivelato abbastanza potente per consentire una classificazione delle teorie. Infatti si ha il profondo risultato dovuto a Morley che risolve una congettura di Łoś:

TEOREMA (Morley, 1964). *Se una teoria è α-categorica per un cardinale $\alpha>\aleph_0$, essa è β-categorica per ogni cardinale $\beta>\aleph_0$.*

COROLLARIO. Esistono soltanto tre possibilità per una teoria che ammette modelli infiniti: *a*) è α-categorica per ogni cardinale α infinito; *b*) è α-categorica solo per $\alpha=\aleph_0$; *c*) è α-categorica per ogni $\alpha>\aleph_0$ senza esserlo per $\aleph_0$.

2.3. «Indiscernibilità» dei modelli e completezza.

In un certo qual senso le proprietà del primo ordine sono *elementari*. Il tema di questo approccio all'analisi non standard è quello: 1) del rapporto che esiste tra una struttura concreta e la sua teoria al primo ordine; 2) dell'analisi delle estensioni $^*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$ che ne sono «indiscernibili». Tali estensioni esistono soltanto se $\mathrm{Th}(\mathbf{R})$ non caratterizza $\mathbf{R}$. E questo già è noto proprio per il teorema di Löwenheim-Skolem (cfr. sopra, p. 473).

È dunque naturale interrogarsi sulla relazione di equivalenza che ricopre l'«indiscernibilità» di due strutture. Si tratta della cosiddetta equivalenza elementare. Intuitivamente due strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dello stesso tipo sono elementarmente equivalenti se hanno la stessa teoria al primo ordine: $\mathrm{Th}(\mathcal{A})=\mathrm{Th}(\mathcal{B})$. Ma occorrono alcune precauzioni per il fatto che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ non hanno necessariamente le stesse costanti.

DEFINIZIONE 1. *Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due strutture dello stesso tipo con insiemi di base rispettivamente A e B. Sia N un sottoinsieme di $A\cap B$. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono dette elementarmente equivalenti relativamente a N se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno la stessa teoria relativamente a L_N, cioè se soddisfano gli stessi enunciati purché questi abbiano le loro costanti in N.*

Questa definizione si divide in due sottodefinizioni (2 e 3).

DEFINIZIONE 2. *$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono dette elementarmente equivalenti (si scrive $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$) se sono elementarmente equivalenti relativamente all'insieme delle loro costanti strutturali (per esempio 0 e 1 per ogni corpo).*

È chiaro che la relazione di equivalenza elementare è una relazione di equivalenza.

PROPOSIZIONE (banale). Se $\mathcal{A}\simeq\mathcal{B}$, allora $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$ ($\simeq$ indica l'isomorfismo).

Osservazione: Se reciprocamente $\mathcal{A}\equiv\mathcal{B}$ implica $\mathcal{A}\simeq\mathcal{B}$, ciò significa che la teoria di $\mathcal{A}$ è categorica (cfr. sopra, p. 471).

DEFINIZIONE 3. *Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due strutture dello stesso tipo tali che $\mathcal{A}$ sia una sottostruttura di $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$).* (Si può, al solito, supporre piú generalmente che $\mathcal{A}$ sia immersa in $\mathcal{B}$ mediante un'iniezione $j:\mathcal{A}\hookrightarrow\mathcal{B}$ che conserva le strutture e identifica $\mathcal{A}$ e $j(\mathcal{A})$). *Si dice che $\mathcal{B}$ è una estensione elementare di $\mathcal{A}$ – e si scrive: $\mathcal{A}\preccurlyeq\mathcal{B}$ – se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono elementarmente equivalenti relativamente ad A.*

Questa nozione cruciale è stata introdotta da Tarski e Vaught.

PROPOSIZIONE (banale). Se $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$, allora $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

PROPOSIZIONE. Se $\mathcal{A}$ è una struttura finita, tutte le sue estensioni elementari sono banali (cioè isomorfe a $\mathcal{A}$).

Le nozioni di equivalenza elementare e di estensione elementare sono nozioni semantiche di origine sintattica. Sono legate in modo essenziale al linguaggio di base; inoltre sono molto *meno fini* della relazione di isomorfismo, puramente semantica. Ma proprio per questo permettono una prima classificazione delle strutture e delle loro teorie.

La nozione chiave per la teoria dei modelli non standard è, infine, quella di estensione elementare. Tale nozione è piú forte di quella di equivalenza elementare. Dire infatti $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$ non significa semplicemente $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Vuol dire invece che le proprietà strutturali di *tutti* gli elementi di $\mathcal{A}$ sono conservate per estensione a $\mathcal{B}$, o ancora che nell'estensione a $\mathcal{B}$ nessun nuovo elemento viene a sostituirsi a un elemento di $\mathcal{A}$ facendolo «scadere» da una proprietà del primo ordine.

Si considerino per esempio le strutture d'ordine $\mathcal{A} = \langle \mathbf{N} \setminus (0), < \rangle$ e $\mathcal{B} = \langle \mathbf{N}, < \rangle$. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. Se $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, allora $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ (cfr. p. 475). Ma $\mathcal{B}$ non è una estensione elementare di $\mathcal{A}$. Infatti, quando si passa da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, l'elemento 1, che è il primo elemento di $\mathcal{A}$ (proprietà del primo ordine) si trova «soppiantato» dall'elemento 0 di $\mathcal{B}$. L'enunciato $\forall x\ (x \geq 1)$ che è un enunciato di L_A non vale piú in $\mathcal{B}$. Il che non impedisce che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ siano isomorfi. Ciò significa semplicemente che l'isomorfismo cosí definito è incompatibile coll'immersione $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Il fatto che nessun elemento di $\mathcal{A}$ debba trovarsi «scaduto» da una delle sue proprietà fornisce un criterio per le estensioni elementari, che permette di restringersi a una sottoclasse di enunciati.

Applicando proprio tale criterio si può dimostrare il seguente risultato assai significativo:

TEOREMA. $\langle \mathbf{Q}, < \rangle \preccurlyeq \langle \mathbf{R}, < \rangle$.

Era già noto (teorema di Cantor: cfr. sopra, p. 474) che la teoria Σ_D degli insiemi densamente ordinati senza primo e ultimo elemento è $\aleph_0$-categorica e che dunque ogni modello numerabile di Σ_D è isomorfo a $\langle \mathbf{Q}, < \rangle$. Si vede ora che $\langle \mathbf{R}, < \rangle$ – che non può essere isomorfo a $\langle \mathbf{Q}, < \rangle$ poiché non numerabile – è un'estensione elementare di $\langle \mathbf{Q}, < \rangle$. Ciò mostra in particolare che la proprietà fenomenologica primaria di $\mathbf{R}$, quella di essere un continuo, non è una proprietà del primo ordine (cioè elementare) della sua struttura d'ordine. (Si veda anche, a questo proposito, l'articolo «Continuo/discreto» in questa stessa *Enciclopedia*).

Il concetto di estensione elementare precisa lo scarto sintassi/semantica enunciato dal teorema di Löwenheim-Skolem. La precedente formulazione del teorema può venir scomposta nei due enunciati seguenti:

TEOREMA (Löwenheim-Skolem, *downward*). *Sia Σ un insieme di enunciati di L di cardinale α che ammette un modello infinito di cardinale $\geq \alpha$; se α è infinito, Σ ha un modello di cardinale α, altrimenti Σ ha un modello di cardinale $\aleph_0$.*

Osservazione: Come corollario, si ottiene immediatamente che esistono modelli numerabili della teoria al primo ordine dei numeri reali. Quando comparve sulla scena matematica, questo straordinario risultato è stato classificato come un paradosso. In realtà, mostra semplicemente la forza della restrizione al primo ordine.

Rilevante all'esistenza dei modelli utilizzati dall'analisi non standard è poi, direttamente, il secondo enunciato:

TEOREMA (Löwenheim-Skolem, *upward*). *Sia Σ una teoria di cardinale α. Se Σ ha un modello infinito, ha un modello per ogni cardinale infinito $\beta \geq \alpha$.*

Dimostrazione, nelle linee essenziali [per i dettagli si veda ad esempio Bell e Slomson 1969, pp. 81-82]: si utilizzerà in modo specifico la nozione di estensione elementare: sarà sufficiente mostrare che se $\mathcal{A}$ è una struttura infinita di cardinale α – in cui il linguaggio L è interpretato – $\mathcal{A}$ possiede estensioni elementari per ogni cardinale $\beta \geq \alpha, \rho$, ove ρ è il cardinale del linguaggio L, cioè il cardinale dell'insieme dei simboli di L.

A questo scopo, sia $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ relativamente a L_A e $\beta \geq \alpha, \rho$. Sia B un insieme di cardinale β. Si formino poi gli insiemi di enunciati $K_1 = \{a \neq b\}$ per $a \in A$, $b \in B$, i quali esprimono che A, base di $\mathcal{A}$, e B sono disgiunti; e $K_2 = \{b_1 \neq b_2\}$ per $b_1, b_2 \in B$ con $b_1 \neq b_2$, i quali esprimono che elementi di B distinti sono distinti. Sia $\Sigma' = \Sigma \cup K_1 \cup K_2$. Σ' è di cardinale β ed è consistente. Se non lo fosse, esisterebbe un insieme finito $\Sigma'_f = \Sigma_f \cup K_{1f} \cup K_{2f}$ da cui si deriva una contraddizione. $K_{1f} \cup K_{2f}$ non può essere vuoto in quanto Σ_f ammette un modello $\mathcal{A}$ e pertanto è consistente. Siano $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$ le costanti di $K_{1f} \cup K_{2f}$. Poiché $\mathcal{A}$ è infinita, si può riferire $b_1, \ldots, b_m$ a m elementi distinti di A e distinti da $a_1, \ldots, a_n$. Σ'_f è dunque consistente in quanto ammette $\mathcal{A}$ come modello. Contraddizione. Dunque Σ' è consistente. Per il teorema di completezza (cfr. sopra, p. 472), ammette un modello $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ è di cardinalità β, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e poiché $\mathcal{B}$ è un modello di Σ, teoria di $\mathcal{A}$ relativamente a L_A, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

COROLLARIO. Esistono modelli non standard di $\mathbf{R}$.

Le nozioni di equivalenza elementare e di estensione elementare consentono anche di definire certe proprietà strutturali delle teorie che generalizzano quelle di categoricità. È naturale, infatti, chiedersi quali teorie posseggano la proprietà per cui tutti i loro modelli sono «indiscernibili». A seconda che si scelga l'equivalenza elementare o l'estensione elementare, si ottengono due distinte nozioni di «completezza» di una teoria.

DEFINIZIONE. *Una teoria Σ è detta completa se tutti i suoi modelli sono elementarmente equivalenti.*

PROPOSIZIONE. Sia $\mathcal{A}$ una struttura: $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ è completa.

COROLLARIO (Lindenbaum). Ogni teoria ammette una estensione completa.

La proprietà di completezza, apparentemente semantica, è equivalente in realtà, per il teorema di completezza, a una proprietà sintattica. Si ha infatti il seguente teorema:

TEOREMA. *Una teoria* Σ *è completa se e solo se, per ogni enunciato* φ, *è sia* $\Sigma \vdash \varphi$, *sia* $\Sigma \vdash \sim\varphi$.

Dire che una teoria Σ è completa significa dunque affermare che la sua chiusura deduttiva Σ^* è completa nel senso di massimale: non è possibile aggiungerle alcun enunciato senza abolirne la consistenza. Il teorema appena enunciato fornisce un utile strumento per mostrare che certe teorie *non* sono complete.

Esempio.

La teoria dei corpi commutativi (anche algebricamente chiusi) non è completa. Infatti la caratteristica di un corpo (che è una proprietà del primo ordine se essa è diversa da zero: si veda l'osservazione a p. 474) non è derivabile dagli assiomi dei corpi.

È dunque opportuno disporre di un *criterio* efficace che assicuri che una teoria *è* completa.

TEOREMA (Łoś-Vaught, 1954). *Se* Σ *è una teoria senza modelli finiti e* α-*categorica per un cardinale* α *infinito,* Σ *è allora completa.*

Osservazione: Questo risultato mostra proprio che la nozione di completezza è un indebolimento di quella di categoricità.

COROLLARIO. La teoria Σ_D degli insiemi con ordine denso senza primo e ultimo elemento è completa.

Dimostrazione: Teorema di Cantor (cfr. sopra, p. 474).

COROLLARIO. $\langle \mathbf{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbf{R}, < \rangle$.

COROLLARIO. Le teorie Σ_{CC_0} e Σ_{CC_p} dei corpi algebricamente chiusi di caratteristica o e p sono complete.

Dimostrazione: Teorema di Steinitz (cfr. sopra, p. 474).

Osservazione: Già si è visto che ogni corpo algebricamente chiuso di caratteristica o avente la potenza del continuo è isomorfo a $\mathbf{C}$.

Si constata ora che ogni corpo K algebricamente chiuso di caratteristica o è elementarmente equivalente a $\mathbf{C}$. Se dunque si dimostra una proprietà del primo ordine per $\mathbf{C}$, automaticamente essa è dimostrata per K, per esempio per le chiusure algebriche dei corpi di funzioni razionali. Si tratta di un caso particolare (principio di Lefschetz) di un principio generale di trasferimento la cui importanza epistemologica è stata sottolineata da Robinson: «L'uso di linguaggi formali ci permette di studiare simultaneamente intere classi di teoremi laddove la pratica matematica ordinaria si deve limitare ai singoli teoremi considerati uno per uno. In particolare, in alcuni casi, diventa possibile dimostrare che se un teorema di una data classe è vero per una struttura di un certo tipo è vero anche per una struttura di tipo diverso ad essa collegata. Chiameremo *principi di trasferimento* risultati del genere. Anzi, il classico principio di dualità della geometria proiettiva può essere considerato come un teorema metamatematico di questo tipo. Il carattere logico di questo principio, però, è cosí immediato che la sua scoperta non ha reso necessaria formalizzazione alcuna» [1963, trad. it. p. 52].

La nozione di completezza che si deve a Robinson e che viene associata non piú all'equivalenza elementare ma alla estensione elementare è piú sottile in quanto quest'ultima non è una relazione di equivalenza.

DEFINIZIONE. *Una teoria* Σ *è detta* $\mathfrak{M}$-*completa (completa rispetto ai modelli) se per ogni inclusione* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ *di modelli di* Σ, $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$.

La $\mathfrak{M}$-completezza può essere ricondotta alla completezza se si prendono in considerazione i linguaggi L_A.

DEFINIZIONE. *Sia* $\mathcal{A}$ *una struttura di base* A. *Si chiama diagramma di* $\mathcal{A}$ *(e si scrive* $\mathrm{D}(\mathcal{A})$*) l'insieme degli enunciati atomici e delle negazioni di enunciati atomici di* L_A *che sono validi in* $\mathcal{A}$.

Una struttura $\mathcal{B}$ è un modello di $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ se e solo se contiene una sovrastruttura isomorfa ad $\mathcal{A}$.

TEOREMA (definizione sintattica della $\mathfrak{M}$-completezza). *Una teoria* Σ *è* $\mathfrak{M}$-*completa se e solo se per ogni modello* $\mathcal{A}$ *di* Σ *la teoria* $\Sigma \cup \mathrm{D}(\mathcal{A})$ *è una teoria completa di* L_A.

Osservazione: Benché fortemente correlate, le nozioni di completezza e di $\mathfrak{M}$-completezza hanno ciascuna il loro specifico interesse. Si consideri per esempio la teoria $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ in cui $\mathfrak{M} = \langle \mathbf{N}, < \rangle$ (teoria degli insiemi numerabili con ordine discreto e con primo elemento). Essendo la teoria di una struttura, essa è completa. Ciò nonostante l'esempio dell'estensione non elementare $\langle \mathbf{N} \setminus (0), < \rangle \subset \langle \mathbf{N}, < \rangle$ mostra che essa non è $\mathfrak{M}$-completa.

Dualmente, si vedrà tra breve che la teoria dei corpi algebricamente chiusi è $\mathfrak{M}$-completa. Ora (si veda l'esempio a p. 478) essa non è completa.

L'accoppiamento dei teoremi sulla definizione sintattica della $\mathfrak{M}$-completezza (cfr. sopra) e sulle condizioni di completezza di una teoria (p. 478) fornisce un criterio per mostrare che una teoria *non è* $\mathfrak{M}$-completa. Ma è opportuno disporre anche di un criterio che permetta di mostrare che una teoria *è* $\mathfrak{M}$-completa. Tale criterio è stato introdotto da Robinson. Esso si basa sull'idea che per sapere se una teoria è completa, basta verificarlo per una classe abbastanza ristretta di enunciati [cfr. *ibid.*, p. 117]. È in questo modo che si è potuto dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA. *La teoria* Σ_{CC} *dei corpi algebricamente chiusi è* $\mathfrak{M}$-*completa.*

Che la teoria dei corpi algebricamente chiusi sia $\mathfrak{M}$-completa è dato qui come un risultato. Sotto il profilo storico si tratta però dell'origine concettuale della nozione di $\mathfrak{M}$-completezza. Introducendo quest'ultima, Robinson si era proposto infatti di tradurre nei termini puramente metamatematici della teoria dei modelli la proprietà di chiusura algebrica dei corpi e di farne un paradigma per le teorie algebriche in generale.

D'altronde il teorema or ora enunciato non è altro che una riformulazione metamatematica di una delle chiavi di volta della geometria algebrica, cioè il *Nullstellensatz* di Hilbert (cfr. gli articoli « Geometria e topologia » e « Invariante » in questa stessa *Enciclopedia*). Ora, la definizione di base della geometria algebrica è quella di varietà algebrica. Sia K un corpo. Le varietà algebriche su K sono i sottoinsiemi di K^n definiti dall'annullarsi di sistemi di polinomi $f_1, \ldots, f_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Se V è una varietà di K^n definita dai polinomi $f_1, \ldots, f_p$, è chiaro che ogni polinomio f appartenente all'ideale $\mathfrak{J} = (f_1, \ldots, f_p)$ di $K[x_1, \ldots, x_n]$ generato da $f_1, \ldots, f_p$ è identicamente nullo su V. V è dunque definita dall'ideale $\mathfrak{J}$. Se $\mathfrak{J} = K[x_1, \ldots, x_n]$ è l'ideale improprio di $K[x_1, \ldots, x_n]$, V è vuota poiché $1 \in \mathfrak{J}$ e 1 non si annulla mai. Il problema è allora di sapere se *ogni* ideale proprio definisce una varietà non vuota.

TEOREMA (*Nullstellensatz*). *Se K è algebricamente chiuso ogni ideale proprio $\mathfrak{J}$ di $K[x_1, \ldots, x_n]$ ammette uno zero.*

Dimostrazione (nelle linee generali): Occorre mostrare che se $V = \emptyset$ (dove V è la varietà definita dall'annullamento di $\mathfrak{J}$) allora esistono dei polinomi $g_1, \ldots, g_p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tali che

$$\sum_{i=1}^{p} g_i f_i = 1$$

ove $f_1, \ldots, f_p$ generano $\mathfrak{J}$.

1) Se $V = \emptyset$, allora $V_{K'} = \emptyset$ per ogni estensione K' di K ove $V_{K'}$ è la varietà di K'^n definita dagli stessi polinomi di V (estensione del corpo degli scalari). È possibile supporre K' algebricamente chiuso. Siccome $V = \emptyset$ è una proprietà del primo ordine, 1) è una conseguenza diretta della $\mathfrak{M}$-completezza di K_{CC}.

2) Se $V_{K'} = \emptyset$ per ogni estensione K' di K, $\mathfrak{J}$ è improprio: $1 \in \mathfrak{J}$ o ancora esistono $g_1, \ldots, g_p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tali che

$$\sum_{i=1}^{p} g_i f_i = 1.$$

Se $\mathfrak{J}$ fosse proprio, $\mathfrak{J}$ sarebbe contenuto in un ideale massimale $\mathfrak{M}$ di $K[x_1, \ldots, x_n]$. Ora, il quoziente $K' = K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{M}$ è un'estensione di K. Sia a_i, $i = 1, \ldots, n$, l'immagine in K' del polinomio x_i. Siccome $f_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1, \ldots, p$, il punto $(a_1, \ldots, a_n)$ di K'^n è un punto di $V_{K'}$. Dunque $V_{K'} \neq \emptyset$. Contraddizione.

Si vede che l'essenziale della dimostrazione è proprio la $\mathfrak{M}$-completezza di Σ_{CC}.

Cosí la teoria dei corpi algebricamente chiusi è $\mathfrak{M}$-completa, cioè completa

per l'estensione elementare, anche se non è completa, cioè non è completa per l'equivalenza elementare. A prima vista può sembrare paradossale. In realtà non si deve dimenticare che se l'estensione elementare è una relazione essenzialmente piú forte di quella di equivalenza elementare nella misura in cui è relativa ai linguaggi L_A e non al linguaggio L, è nello stesso tempo piú debole nella misura in cui considera solo coppie di modelli di cui l'uno è l'estensione dell'altro. Ora, ogni corpo è una estensione di un corpo primo, $\mathbf{Q}$ per la caratteristica 0 e $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ per le caratteristiche finite p. Due corpi di cui l'uno è l'estensione dell'altro hanno dunque necessariamente la stessa caratteristica. Si è visto sopra (p. 478) che l'indeterminazione della caratteristica è proprio il solo ostacolo alla completezza di Σ_{CC}.

Il rapporto fra quanto si è dimostrato a p. 478 circa la teoria dei corpi commutativi, e circa i corpi algebricamente chiusi di caratteristica 0 oppure p, e infine a p. 479 circa la $\mathfrak{M}$-completezza dei corpi algebricamente chiusi, si basa dunque sull'esistenza dei corpi primi. Tutto ciò è immediatamente generalizzabile.

DEFINIZIONE. *Sia Σ una teoria. Un modello $\mathcal{A}$ di Σ è detto primo se ogni modello di Σ possiede una sottostruttura isomorfa a $\mathcal{A}$.*

TEOREMA (criterio del modello primo). *Se Σ è una teoria $\mathfrak{M}$-completa che possiede un modello primo, è allora completa.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{A}_p$ il modello primo di Σ e $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ due modelli. Esistono un $\mathcal{A}_{1p} \subseteq \mathcal{A}_1$ e un $\mathcal{A}_{2p} \subseteq \mathcal{A}_2$ tali che $\mathcal{A}_{1p} \simeq \mathcal{A}_p \simeq \mathcal{A}_{2p}$. Siccome Σ è $\mathfrak{M}$-completa, $\mathcal{A}_{1p} \preccurlyeq \mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_{2p} \preccurlyeq \mathcal{A}_2$. Dunque $\mathcal{A}_{1p} \equiv \mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_{2p} \equiv \mathcal{A}_2$. E siccome $\mathcal{A}_{1p} \simeq \mathcal{A}_p \simeq \mathcal{A}_{2p}$, $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$.

COROLLARIO. Le teorie Σ_{CC_0} e Σ_{CC_p} sono complete.

Dimostrazione: Σ_{CC_0} e Σ_{CC_p} sono $\mathfrak{M}$-complete poiché Σ_{CC} è $\mathfrak{M}$-completo. Σ_{CC_0} ammette per modello primo la chiusura algebrica $\overline{\mathbf{Q}}$ del corpo primo $\mathbf{Q}$ e Σ_{CC_p} ammette per modello primo la chiusura algebrica $\overline{\mathbf{F}}_p$ del corpo $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Analogamente si può mostrare:

TEOREMA. *La teoria Σ_D degli insiemi con ordine denso senza primo ed ultimo elemento è $\mathfrak{M}$-completa.*

COROLLARIO. $\langle \mathbf{Q}, < \rangle \prec \langle \mathbf{R}, < \rangle$.

COROLLARIO. Σ_D è completa.

Dimostrazione: Σ_D ammette $\langle \mathbf{Q}, < \rangle$ per modello primo.

Si vede cosí prendere forma una teoria coerente delle teorie stesse, almeno delle teorie algebriche. Dopo i primi lavori pionieristici, quest'analisi del rapporto sintassi/semantica si è arricchita in modo considerevole e ha portato a profondi risultati. Per esempio è degno di nota, fra i tanti, il seguente:

TEOREMA. *Sia Σ una specificazione della teoria dei corpi che sia completa e $\aleph_1$-categorica, allora Σ o è la teoria Σ_{CC_0}, o è la teoria Σ_{CC_p}, o è la teoria di un corpo particolare.*

Una delle conseguenze piú fruttuose della problematica della completezza è stata lo sviluppo di una metamatematica dell'algebra. Passando dall'algebra alla logica si è mostrato che certe nozioni algebriche erano generalizzabili in nozioni puramente logiche; passando dalla logica all'algebra si è mostrato che certi teoremi classici erano essenzialmente piú di natura logica che algebrica. Questo era, ad esempio, il caso dell'interpretazione dei teoremi di Steinitz e di Cantor in termini di completezza, del principio di Lefschetz in termini di principio di trasferimento e del *Nullstellensatz* in termini di $\mathfrak{M}$-completezza.

Come ha osservato Robinson: «Spesso in algebra ci si imbatte in concetti alla cui base stanno idee fondamentali che, anche se vaghe, sembrano avere un raggio di applicazione piú generale di quanto appaia dalle definizioni concrete... Capita spesso inoltre che in un solo concetto si trovino riunite piú idee fondamentali. Concetti del genere, una volta che ci si muova in contesti piú generali, possono cosí spezzarsi in piú nozioni come anche in ambiti diversi essere passibili di interpretazioni diverse» [1963, trad. it. p. 168].

Il carattere metamatematico di questo approccio è evidente in quanto fa uso esplicito della nozione di deducibilità, malgrado che questa si possa ridefinire in termini di teoria dei modelli [cfr. *ibid.*, p. 169]. Va osservato che una delle traduzioni piú importanti di nozioni algebriche in un quadro metamatematico è quella di «chiusura algebrica» in termini di $\mathfrak{M}$-completamento (o «completamento rispetto ai modelli»). Definire quest'ultima nozione è pressoché immediato. Si dimostra infatti [*ibid.*, pp. 136-37] che per ogni insieme di enunciati K (non vuoto e non contraddittorio) non può esistere a meno di equivalenze piú di una estensione K' di K che sia al contempo $\mathfrak{M}$-completa e $\mathfrak{M}$-consistente relativamente a K (K' si dice $\mathfrak{M}$-consistente se ogni modello M' di K' è modello del diagramma D di un modello M di K): questo insieme K', *se esiste*, è detto appunto $\mathfrak{M}$-completamento di K [*ibid.*, p. 157]. In modo «naturale» ci si interroga allora circa l'esistenza di $\mathfrak{M}$-completamenti per teorie in generale: si cerca cioè un correlato della nozione di «chiusura algebrica» per strutture per le quali una nozione di chiusura non è emersa in modo naturale. Uno dei piú importanti successi di questa strategia è stato il chiarimento concettuale della risoluzione (da parte di Artin e Schreier, 1927) del diciassettesimo problema di Hilbert (dimostrare la congettura: una funzione razionale definita positiva è *sempre* una somma di quadrati di funzioni razionali) nei termini di $\mathfrak{M}$-completamenti [in particolare, *ibid.*, pp. 254-66]. Infine: una strategia del genere non risulta piú applicabile nel caso di teorie algebriche sempre piú fondamentali e meno semplici (la piú fondamentale e meno semplice è forse la teoria dei gruppi): ciò conduce allora a indebolire dapprima la nozione di $\mathfrak{M}$-completezza e quindi quella stessa di validità (teoria del *forcing* sviluppata, tra gli altri, dallo stesso Robinson). Queste piú recenti ricerche non possono venir affrontate qui: si termina quindi il riepilogo di alcuni risultati di completezza associati alla «indiscernibilità» e si passa a delineare un metodo *esplicito* di costruzione di estensioni elementari, cioè di modelli non standard.

2.4. Metodo degli ultraprodotti.

Finora si dispone solo di un teorema di esistenza (Löwenheim-Skolem) dei modelli non standard: ma per lavorare entro tali modelli occorre anche un metodo uniforme di costruzione. Si è rivelata particolarmente efficace la cosiddetta tecnica degli ultraprodotti. Se ne daranno i lineamenti essenziali, rimandando a testi specifici [per esempio Bell e Slomson 1969] per i dettagli.

Il metodo degli ultraprodotti è un metodo semantico di costruzione di modelli a partire da modelli già disponibili. Com'è noto, il modo piú semplice di costruire strutture è quello che consiste nel considerare prodotti diretti. Perché non percorrere anche qui questa via? La difficoltà sta nel fatto che la classe $\mathfrak{M}(\Sigma)$ dei modelli di Σ non ha nessuna ragione a priori di essere chiusa rispetto all'operazione di prodotto diretto (per esempio il prodotto diretto di due corpi non è *mai* un corpo). È dunque necessario «raffinare» la nozione di prodotto diretto. L'idea fondamentale – dovuta a Łoś – consiste nel lavorare nel prodotto

$$\mathcal{A}_I = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

indebolendovi la nozione di validità in una nozione di validità «quasi-ovunque» (q.o.), cioè relativizzando tale nozione assoluta a un «opportuno» insieme D di parti dell'insieme I degli indici. Il problema diventa allora quello di sapere a quali condizioni su D il «prodotto» degli $\mathcal{A}_i$ relativi a D è ancora un modello di Σ.

Sia dunque D un insieme di parti di I. Si indebolisce la nozione di identità su

$$A_I = \prod_{i \in I} A_i$$

ponendo che gli elementi $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ e $\mathbf{b} = (b_i)_{i \in I}$ di A_I sono equivalenti ($\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$) se il sottoinsieme $U \subset I$ degli i tali che $a_i = b_i$ appartiene a D. Si vuole che la relazione $\sim$ sia una relazione di equivalenza: 1) $\sim$ deve essere riflessiva: $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}$ per ogni $\mathbf{a} \in A_I$. Ciò esige che $I \in D$; 2) $\sim$ deve essere simmetrica: se $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$, allora $\mathbf{b} \sim \mathbf{a}$. Ciò è vero qualunque sia D; 3) $\sim$ deve essere transitiva: se $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \sim \mathbf{c}$, allora $\mathbf{a} \sim \mathbf{c}$. Siano $U = \{i \in I \mid a_i = b_i\}$, $V = \{i \in I \mid b_i = c_i\}$ e $W = \{i \in I \mid a_i = c_i\}$. Per ipotesi $U, V \in D$: è banale verificare $U \cap V \subseteq W$. Si vuole che $U, V \in D$ implichi *sempre* $W \in D$. Ciò esige: 1) se $U, V \in D$, allora $U \cap V \in D$: D è chiuso per le intersezioni finite; 2) se $Z \in D$ e $Z \subseteq W$, allora $W \in D$: D è chiuso per estensione.

D'altra parte la relazione $\sim$ non deve essere una equivalenza banale su A_I (cioè si deve evitare che tutti gli elementi risultino equivalenti). Ciò esige $\varnothing \notin D$.

DEFINIZIONE. *Sia I un insieme. Un filtro su I è un insieme non vuoto D di parti di I tale che:*

a) $\emptyset \notin D$,
b) se $U, V \in D$, *allora* $U \cap V \in D$,
c) se $U \subseteq V$ *e se* $U \in D$, *allora* $V \in D$.

Dunque si è mostrato:

PROPOSIZIONE. Se D è un filtro su I, $\sim$ è una relazione di equivalenza.

Sia dunque D un filtro: si denoti con $A_D = A_I/D$ il quoziente di A_I per la relazione di equivalenza $\sim$, cioè l'insieme delle classi di equivalenza $\dot{\mathbf{a}}$, di elementi $\mathbf{a} \in A_I$.

Sia R_I una relazione n-aria di $\mathcal{A}_I$. Le viene allora associata la relazione «relativizzata» $R_{D_{\text{q.o.}}}$ che è soddisfatta solo se R_I è soddisfatta «quasi-ovunque».

DEFINIZIONE. $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in R_{D_{\text{q.o.}}}$ *se e solo se* $U = \{i \in I \mid (a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}) \in R_i\} \in D$.

PROPOSIZIONE. $R_{D_{\text{q.o.}}}$ è compatibile con la relazione $\sim$: se $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in R_{D_{\text{q.o.}}}$ e se $\mathbf{a}_k \sim \mathbf{b}_k$ per $k = 1, \ldots, n$, allora $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) \in R_{D_{\text{q.o.}}}$.

Dimostrazione: Sia $U_k = \{i \in I \mid a_{k,i} = b_{k,i}\}$ e sia $V = \{i \in I \mid (b_{1,i}, \ldots, b_{n,i}) \in R_i\}$. Si vuol mostrare $V \in D$. Ma $U \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n \subseteq V$ e $U, U_1, \ldots, U_n \in D$ per ipotesi. Per la definizione di filtro, $V \in D$.

La relazione $R_{D_{\text{q.o.}}}$ passa dunque al quoziente e definisce una relazione R_D su A_D.

COROLLARIO. Se $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di strutture di un certo tipo e se D è un filtro su I, la struttura $\mathcal{A}_D = \mathcal{A}_I/D$ è una struttura dello stesso tipo.

Resta da analizzare a quali ulteriori condizioni su D, $\mathcal{A}_D$ sarà un modello di Σ se le $\mathcal{A}_i$ sono modelli di Σ. Si deve ora «relativizzare» la nozione di validità.

DEFINIZIONE. *Sia φ un enunciato del linguaggio L associato al tipo di struttura considerato. Si dice che φ è quasi ovunque valido in $\mathcal{A}_I$ e si scrive:* $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \varphi$ *se* $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in D$.

Il problema è ora di sapere a quali condizioni su D la validità quasi ovunque su $\mathcal{A}_I$ si identifica con la validità su $\mathcal{A}_D$:

(1) $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \varphi$ se e solo se $\mathcal{A}_D \models \varphi$.

Il ragionamento è per induzione sulla complessità degli enunciati.

a) Sia $a = b$ un enunciato atomico di L interpretato come $a_i = b_i$ in $\mathcal{A}_i$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ in $\mathcal{A}_I$ e $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{b}}$ in $\mathcal{A}_D$. $\mathcal{A}_D \models a = b$ se e solo se $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{b}}$ se e solo se $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ se e solo se $\{i \in I \mid a_i = b_i\} \in D$ se e solo se $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} a = b$.

b) Sia $R(a_1, \ldots, a_n)$ un enunciato atomico di L interpretato come $(a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}) \in R_i$ in $\mathcal{A}_i$, $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in R_I$ in $\mathcal{A}_I$ e $(\dot{\mathbf{a}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{a}}_n) \in R_D$ in $\mathcal{A}_D$. $\mathcal{A}_D \models R(a_1, \ldots, a_n)$ se e solo se $(\dot{\mathbf{a}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{a}}_n) \in R_D$ se e solo se $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in R_{D_{\text{q.o.}}}$ se e solo se $\{i \in I \mid (a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}) \in R_i\} \in D$ se e solo se $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models R(a_1, \ldots, a_n)\} \in D$ se e solo se $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} R(a_1, \ldots, a_n)$.

c) Sia $\varphi = \psi \wedge \chi$ una congiunzione di enunciati. Siano $U = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \psi\}$, $V = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \chi\}$ e $W = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \psi \wedge \chi\}$. $\mathcal{A}_D \models \varphi$ se e solo se $\mathcal{A}_D \models \psi$ e $\mathcal{A}_D \models \chi$ se e solo se (per ipotesi di induzione) $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \psi$ e $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \chi$ se e solo se $U, V \in D$. D'altra parte $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \varphi$ se e solo se $W \in D$. Ma $W = U \cap V$. Ora, essendo D un filtro, $U, V \in D$ se e solo se $U \cap V \in D$.

d) Sia $\varphi = \exists x\, \psi(x)$ un enunciato esistenziale. Si supponga $\mathcal{A}_D \models \varphi$. Ciò significa che esiste un $\dot{\mathbf{a}} \in \mathcal{A}_D$ tale che $\mathcal{A}_D \models \psi(\dot{\mathbf{a}})$. Sia $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ l'elemento di $\mathcal{A}_I$ corrispondente al simbolo di costante che denota $\dot{\mathbf{a}}$. Per ipotesi di induzione $\mathcal{A}_D \models \psi(\dot{\mathbf{a}})$ se e solo se $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \psi(\mathbf{a})$ se e solo se $U = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \psi(a_i)\} \in D$. D'altra parte $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \varphi$ se e solo se $V = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in D$. Ma $U \subseteq V$. Siccome D è un filtro, $V \in D$ e dunque $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \varphi$.

Reciprocamente si supponga $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \varphi$. Ciò significa $V = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in D$. Sia $i \in V$. Esiste un elemento α_i di A_i tale che $\mathcal{A}_i \models \psi(\alpha_i)$. Sia $\mathbf{a}$ un elemento di A_I tale che $a_i = \alpha_i$, se $\mathcal{A}_i \models \varphi$ e tale che a_i sia qualunque se non $\mathcal{A}_i \models \varphi$. L'esistenza di un tale $\mathbf{a}$ è garantita dall'assioma della scelta. Siccome $V \subseteq W = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \psi(a_i)\}$ per costruzione, $V \in D$ implica $W \in D$ cioè $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \psi(\mathbf{a})$. Ma per ipotesi di ricorrenza $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \psi(\mathbf{a})$ se e solo se $\mathcal{A}_D \models \psi(\dot{\mathbf{a}})$. Dunque $\mathcal{A}_D \models \varphi$.

e) Sia infine $\varphi = \sim\psi$ un enunciato negativo. $\mathcal{A}_D \models \varphi$ se e solo se non $\mathcal{A}_D \models \psi$ se e solo se (per ipotesi di ricorrenza) non $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \psi$ se e solo se $U = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \psi\} \notin D$. Reciprocamente $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \varphi$ se e solo se $V = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \sim\psi\} \in D$. Ma siccome sia $\mathcal{A}_i \models \psi$, sia $\mathcal{A}_i \models \sim\psi$, $U = I \setminus V$. (U e V sono complementari). Per soddisfare la (1) occorre dunque che D goda della proprietà supplementare:

(2) Per ogni $U \subseteq I$, $U \in D$ se e solo se $I - U \notin D$.

DEFINIZIONE. *Si chiama ultrafiltro su I un filtro che possiede la proprietà* (2).

Si è dunque dimostrato il risultato fondamentale:

TEOREMA [Łoś 1955]. *Se D è un ultrafiltro su I, per ogni enunciato φ:*

(3) $\mathcal{A}_D \models \varphi$ *se e solo se* $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \varphi$.

DEFINIZIONE. *Se D è un ultrafiltro su I, $\mathcal{A}_D$ si chiama l'ultraprodotto degli $\mathcal{A}_i$. Se $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ per ogni $i \in I$, $\mathcal{A}_D$ si chiama una ultrapotenza di $\mathcal{A}$.* [Cfr. Keisler 1965 per un riassunto del metodo degli ultraprodotti].

COROLLARIO. Se $\mathcal{A}_D$ è un ultraprodotto di modelli di Σ, $\mathcal{A}_D$ è un modello di Σ.

Dimostrazione: Sia φ un enunciato di Σ. Esso è valido in tutti gli $\mathcal{A}_i$. Dunque $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\} = I$. Siccome D è un filtro $I \in D$ e dunque $\mathcal{A}_I \models \varphi$. Per il teorema di Łoś, $\mathcal{A}_D \models \varphi$. q.e.

Si consideri il caso di un'ultrapotenza $\mathcal{A}_D$ di $\mathcal{A}$. Un elemento $\mathbf{a} \in A_I$ può essere considerato come quell'applicazione $\mathbf{a} : I \to A$ che è definita da $i \mapsto a_i$. Per tale ragione si utilizzerà talvolta una notazione funzionale $f : I \to A$ e s'indicheranno con f, g, ecc. gli elementi di A_I o di A_D. Sia $a \in A$ e $f_a : I \to A$ la funzione costante $f_a(i) = a$. L'applicazione $a \to f_a$ è una immersione di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}_D$. Se infatti $f_a = f_b$ in $\mathcal{A}_D$, $f_a \sim f_b$ in $\mathcal{A}_I$ e $U = \{i \in I \mid f_a(i) = f_b(i)\} \in D$. Se $a \neq b$, $U = \emptyset$. Ora, $\emptyset \notin D$ poiché D è un filtro e dunque $f_a \neq f_b$ in $\mathcal{A}_D$. In breve, $\mathcal{A}_D$ è una estensione di $\mathcal{A}$.

COROLLARIO. Se $\mathcal{A}_D$ è un'ultrapotenza di $\mathcal{A}$, l'estensione $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}_D$ è elementare: $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{A}_D$.

Dimostrazione: Sia $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ un enunciato di L_A ove le costanti a_k sono interpretate come f_{a_k} in $\mathcal{A}_D$ e $f_{a_k}(i)$ in $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$. Per il teorema di Łoś, $\mathcal{A}_D \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ se e solo se $\mathcal{A}_I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ se e solo se $U = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models$ q.e. $\models \varphi(f_{a_1}(i), \ldots, f_{a_n}(i)\} \in D$. Ma $U = \{i \in I \mid \mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\}$ e dunque $U = \emptyset$ o I. Siccome $\emptyset \notin D$, $U \in D$ se e solo se $U \neq \emptyset$ se e solo se $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Per il teorema di Łoś, si ha dunque a disposizione un metodo uniforme di costruzione di estensioni elementari. A priori questo metodo è molto potente poiché si possono scegliere arbitrariamente sia l'insieme di indici I sia l'ultrafiltro D. Resta però il problema di sapere se si possono ottenere in questo modo estensioni elementari in senso proprio: nulla assicura ancora che l'ultrapotenza $\mathcal{A}_D$ non sia isomorfa ad $\mathcal{A}$.

Siccome esiste un rapporto tra un ultrafiltro D e l'ultraprodotto o l'ultrapotenza $\mathcal{A}_D$, la struttura delle estensioni elementari cosí ottenute dipende da quella di D. Si analizza allora la struttura degli ultrafiltri. Ne esistono due tipi fondamentali. È chiaro, anzitutto, che se $U \subseteq I$, $U \neq \emptyset$ l'insieme $F_U = \{V \subseteq I \mid U \subseteq V\}$ delle estensioni di U è un filtro su I.

DEFINIZIONE. *Un filtro D è detto principale se D è di tipo F_U per $U \subseteq I$.*

PROPOSIZIONE. Un ultrafiltro D su I è principale se e solo se $D = F_{\{x\}}$ per $x \in I$.

Gli ultrafiltri principali sono senza interesse, in quanto conducono a estensioni elementari banali:

TEOREMA. *Sia $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ una famiglia di strutture dello stesso tipo e D un ultrafiltro principale su I. Allora l'ultraprodotto $\mathcal{A}_D$ è isomorfo a una delle $\mathcal{A}_i$. In particolare se $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ per ogni i, l'ultrapotenza $\mathcal{A}_D$ è isomorfa a $\mathcal{A}$.*

Affinché il metodo sia fecondo, si debbono dunque considerare ultrafiltri non principali.

DEFINIZIONE. *Un ultrafiltro non principale è detto libero.*

Si tratta di sapere a quale condizione su I esistono degli ultrafiltri liberi.

PROPOSIZIONE. Se I è un insieme finito, tutti i suoi ultrafiltri sono principali.

Si dovrà quindi prendere I infinito.

Notazione: Se I è un insieme infinito si indichi con F_∞ l'insieme delle parti U di I complementari di parti finite. Essendo I infinito, tutti gli elementi U di F_∞ sono infiniti. È banale verificare che F_∞ è un filtro (filtro di Fréchet di I).

PROPOSIZIONE. Se I è un insieme infinito esistono su I degli ultrafiltri liberi. Questi ultimi sono i raffinamenti massimali del filtro F_∞.

Osservazione: Non solo esistono ultrafiltri liberi su I se I è infinito, ma ne esistono anche «tanti». Se I è di cardinale $\alpha \geq \aleph_0$, $\mathcal{P}(I)$ è di cardinale 2^α e l'insieme degli insiemi di parti di I è di cardinale 2^{2^α}. Ci sono dunque al massimo 2^{2^α} filtri su I, a fortiori al massimo 2^{2^α} ultrafiltri, a fortiori al massimo 2^{2^α} ultrafiltri liberi. Ora,

TEOREMA (Tarski). *Se I è di cardinale $\alpha \geq \aleph_0$, esistono 2^{2^α} ultrafiltri liberi su I.*

Affinché il metodo degli ultraprodotti possa fornire delle estensioni elementari in senso proprio occorre che I sia infinito e che l'ultrafiltro D sia libero. Ma occorre anche, per ciò che riguarda $\mathcal{A}$, che $\mathcal{A}$ sia una struttura infinita. Si ha infatti la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE. Se D è un ultrafiltro (libero o principale) e se $\mathcal{A}$ è una struttura finita, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_D$.

Questo risultato non si estende agli ultraprodotti. Dunque, al fine di ottenere estensioni elementari in senso proprio col metodo degli ultraprodotti, è necessario considerare strutture infinite e ultrafiltri liberi. Ma ciò non è ancora *sufficiente*. Da qui si aprono due strategie. La prima consiste nell'esibire, nel caso particolare preso in considerazione, un elemento $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_D$ tale che $\mathbf{a} \notin \mathcal{A}$.

Esempio.

Sia $\mathfrak{N}$ l'insieme $\mathbf{N}$ degli interi dotato della sua struttura naturale. Siano $I = \mathbf{N}$ e $D \supset F_\infty$ un ultrafiltro libero su I. Si consideri l'ultrapotenza $^*\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_D = \mathfrak{N}^{\mathbf{N}}/D$. Un elemento di $^*\mathfrak{N}$ è semplicemente una classe di equivalenza di applicazioni $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, gli elementi di $\mathfrak{N}$ corrispondendo alle applicazioni costanti. Sia $\mathbf{a} \in {}^*\mathfrak{N}$ l'elemento rappresentato dalla funzione $f(n) = n$. Sia $p \in \mathbf{N}$ un intero qualunque. $V_p = \{n \in \mathbf{N} \mid f(n) > p\} = \{n \in \mathbf{N} \mid n > p\}$ ha complemento finito: $V_p \in F_\infty \subset D$, cioè $V_p \in D$. Dunque per ogni $p \in \mathbf{N}$, $\mathbf{a} > p$ è valido in $^*\mathfrak{N}$: $\mathbf{a}$ è un elemento di $^*\mathfrak{N}$ che non appartiene a $\mathfrak{N}$. L'estensione elementare $\mathfrak{N} \prec {}^*\mathfrak{N}$ è non-banale: $^*\mathfrak{N}$ è un modello non standard dell'aritmetica.

Tale esempio è qui di importanza capitale per il fatto che, essendo $\mathbf{a}$ un intero «infinito», il suo inverso, nell'ultrapotenza $\mathbf{R}_D$, sarà *infinitesimale*.

La strategia di cui si è appena visto un esempio è «viziata» però dal fatto di non essere generalizzabile. Se si vuole disporre di teoremi generali di esistenza di ultrapotenze che siano estensioni elementari in senso proprio, è dunque necessario raffinare l'analisi della «dialettica» fra $\mathcal{A}$ e D. Questa strategia alternativa che in particolare consente di ottenere risultati sulla cardinalità delle ultrapotenze è troppo tecnica per essere qui abbozzata [cfr. per esempio Bell e Slomson 1969].

Oltre a consentire la costruzione esplicita delle estensioni elementari, il metodo degli ultraprodotti fornisce anche una tecnica molto potente di dimostrazione nella teoria dei modelli. Permette per esempio: 1) di ri-dimostrare in modo semantico certi teoremi di base; 2) di dimostrare facilmente che certe proprietà non sono del primo ordine; 3) di disporre di nuovi criteri di completezza.

Riguardo al punto 1), si dimostrano i due teoremi fondamentali di completezza e di compattezza già presentati sopra (p. 472).

TEOREMA DI COMPATTEZZA (Tarski-Scott-Morel). *Un insieme di enunciati Σ ammette un modello se e solo se ogni sottoinsieme finito Δ di Σ ammette un modello.*

Dimostrazione: Sia $I=\mathfrak{F}(\Sigma)$ l'insieme delle parti finite Δ di Σ. Per ogni $\Delta\in I$ esiste per ipotesi un modello $\mathcal{A}_\Delta$ di Δ. Sia $\Delta\in I$ e $\Delta^*=\{\Delta'\in I \mid \Delta\subseteq\Delta'\}$.

L'insieme F delle Δ^* è un insieme di sottoinsiemi non vuoti di I che possiede la proprietà che l'intersezione di un numero finito di suoi elementi è sempre non vuoto. Se infatti $\Delta_1^*, \ldots, \Delta_n^*\in F$, $\Delta_1\cup\ldots\cup\Delta_n\in\Delta_1^*\cap\ldots\cap\Delta_n^*$. Ciò implica che F è estendibile a un filtro e dunque a un ultrafiltro D. Sia $\mathcal{A}_D$ l'ultraprodotto $\left(\prod_{\Delta\in I}\mathcal{A}_\Delta\right)/D$.

Sia ora φ un enunciato di Σ. $\{\varphi\}=\Delta_0\in I$ e $\mathcal{A}_{\Delta_0}\models\varphi$. Dunque $\mathcal{A}_\Delta\models\varphi$ se $\Delta_0\subseteq\Delta$. Siccome $\Delta_0^*=\{\Delta\in I \mid \Delta_0\subseteq\Delta\}\subseteq\{\Delta\in I \mid \mathcal{A}_\Delta\models\varphi\}$ e $\Delta_0^*\in D$, $\{\Delta\in I \mid \mathcal{A}_\Delta\models\varphi\}\in D$. Si ha dunque $\mathcal{A}_D\models\varphi$. $\mathcal{A}_D$ è un modello di ogni enunciato di Σ cioè un modello di Σ.

COROLLARIO (teorema di completezza). *Un insieme di enunciati Σ è consistente se e solo se ammette un modello.*

Dimostrazione: Se Σ è consistente, ogni sottoinsieme finito di Σ è consistente e ammette dunque un modello. Per il teorema di Tarski-Scott-Morel Σ ammette un modello.

Quanto al punto 2) si dimostra che le proprietà di un corpo di essere di caratteristica 0 oppure di essere algebricamente chiuso, *non sono* delle proprietà del primo ordine.

PROPOSIZIONE. La teoria dei corpi di caratteristica 0 non è finitamente assiomatizzabile.

Dimostrazione: Si supponga che il fatto di essere di caratteristica 0 sia un enunciato σ_0 (al primo ordine) della teoria dei corpi. Per ogni numero primo p sia K_p un corpo di caratteristica p. Sia D un ultrafiltro libero sull'insieme (infinito) dei numeri primi P e sia K l'ultraprodotto $K=\prod_{p\in P}K_p/D$. Per il teorema di Łoś K è un corpo. K non può essere di caratteristica $p\in P$. Infatti la proprietà σ_p d'esser di caratteristica p essendo del primo ordine, $U_p=\{q\in P \mid K_q\models\sigma_p\}=\{p\}\notin D$ poiché D è libero. Dunque K è di caratteristica 0. Si ha allora $K\models\sigma_0$ e, per il teorema di Łoś, $\prod_{p\in P}K_p\underset{q.o.}{\models}\sigma_0$. Contraddizione: σ_0 non è del primo ordine.

Nello stesso spirito si può dimostrare la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE. La teoria dei corpi algebricamente chiusi (di caratteristica 0 oppure p) non è finitamente assiomatizzabile.

Riguardo al punto 3), si indicherà soltanto come si possano caratterizzare col metodo degli ultraprodotti sia l'equivalenza elementare sia l'estensione elementare e dedurne nuovi criteri. Per esempio:

TEOREMA [Keisler 1962]. *Due strutture dello stesso tipo sono elementarmente equivalenti se e solo se hanno ultrapotenze isomorfe.*

Osservazione: La dimostrazione di Keisler fa intervenire l'ipotesi generalizzata del continuo. Kochen ha mostrato come farne a meno utilizzando il metodo detto degli ultralimiti (catene infinite di estensioni elementari ottenute da ultrapotenze).

2.5. Strutture di ordine superiore e metodo degli allargamenti di Robinson.

Il metodo degli ultraprodotti (si veda l'esempio di p. 487) permette di ottenere *esplicitamente* delle estensioni elementari in senso proprio $^*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$ che 1) contengono degli infinitesimi; 2) sono al primo ordine «indiscernibili» da $\mathbf{R}$.

Ciò «risolve» a livello aritmetico-algebrico il paradosso dell'infinitesimale leibniziano. Ma non è ancora sufficiente a fondarne una «dottrina», che meriti il nome di analisi non standard.

Infatti nell'estensione $^*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$ si è tenuto conto solo dell'universo degli *Urelemente*. Se $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ è per esempio una funzione, nulla assicura a priori che sia prolungabile in una funzione $^*f:{}^*\mathbf{R}\to{}^*\mathbf{R}$ che svolga in rapporto a $^*\mathbf{R}$ il ruolo che svolge f in rapporto a $\mathbf{R}$. Ma l'analisi si basa proprio sullo studio di entità come le funzioni e degli «spazi» che esse costituiscono. Per parlare di analisi non standard occorre dunque disporre di modelli non standard di $\mathbf{R}$ a cui *tutte* le entità dell'analisi siano automaticamente estendibili con un metodo uniforme. Ciò impone di arricchire considerevolmente il dominio degli *Urelemente* e di prendere in considerazione – senza pertanto «uscire» dal primo ordine – quelle che si chiamano strutture di ordine superiore.

Si parte dall'insieme $U_0=\mathbf{R}$ che verrà detto la base della struttura di ordine superiore e si costruisce progressivamente un insieme $\mathfrak{U}$ che svolge il ruolo di universo del discorso per $\mathbf{R}$, cioè per l'analisi (reale). Sia $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ l'insieme delle

parti di $\mathbf{R}$ e sia $U_1 = \mathbf{R} \cup \mathcal{P}(\mathbf{R}) = U_0 \cup \mathcal{P}(U_0)$. Si definisce in modo analogo U_2 con $U_2 = U_1 \cup \mathcal{P}(U_1)$, ecc. Si pone: $\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$.

Tutte le entità dell'analisi sono elementi di $\mathcal{U}$. Una relazione n-aria su $\mathbf{R}$ è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ ed è un elemento di $\mathcal{U}$; una funzione $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ si può identificare, al solito, con una relazione $(n+1)$-aria; una funzione $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ è un insieme di p relazioni $(n+1)$-arie, ecc. $\mathcal{U}$ contiene tutte le relazioni definite su $\mathbf{R}$, tutte le funzioni, tutte le relazioni di relazioni, tutte le famiglie di funzioni indicizzate da un insieme di $\mathcal{U}$, ecc. In breve, $\mathcal{U}$ è proprio un «universo del discorso» per l'analisi (reale).

Sia $\mathcal{L} = L_{\mathcal{U}}$ il linguaggio ottenuto a partire dal linguaggio L dei predicati del primo ordine per aggiunta dei simboli della teoria degli insiemi e di simboli di costanti per tutti gli elementi di $\mathcal{U}$. Si è cosí introdotta una differenza importante: non si utilizza piú L per parlare di un insieme omogeneo A di *Urelemente* ma per parlare dell'insieme eterogeneo di *Urelemente* $\mathcal{U}$ che costituiscono l'«universo» delle costruzioni insiemiste basate su A. In particolare, è ora consentito quantificare sui sottoinsiemi di A, sui sottoinsiemi dell'insieme dei sottoinsiemi di A (per esempio filtri), sulle applicazioni, sulle funzioni, ecc.

Benché ciò faccia uscire dal primo ordine relativamente ad A, si resta nel primo ordine relativamente a $\mathcal{U}$. Il prezzo che si deve pagare per tale estensione è doppio.

Le quantificazioni diventano, come si dice usualmente, limitate, cioè relative a un dominio specificato. Si consideri per esempio l'enunciato che esprime che $\mathbf{R}$ è archimedeo. Non è possibile formalizzarlo $\forall x(x \neq 0 \Rightarrow \forall y \exists n(|nx| > |y|))$ poiché cosí facendo si quantificherebbe su tutti gli elementi di $\mathcal{U}$ e non su $\mathbf{R}$ e su $\mathbf{N}$. Al contrario, è possibile formalizzarlo con

$$\forall x(x \in \mathbf{R} \wedge x \neq 0 \Rightarrow \forall y(y \in \mathbf{R} \Rightarrow \exists n(n \in \mathbf{N} \Rightarrow |nx| > |y|)))$$

ossia, abbreviando, con

$$\forall x \in \mathbf{R}(x \neq 0 \Rightarrow \forall y \in \mathbf{R}\, \exists n \in \mathbf{N}(|nx| > |y|))$$

dove tutte le quantificazioni sono limitate.

Ma si deve tenere conto anche della eterogeneità di $\mathcal{U}$. Poiché i simboli di variabile di $\mathcal{L}$ si riferiscono a tutti gli elementi di $\mathcal{U}$, se non si prendessero delle precauzioni si otterrebbero enunciati che «mescolano» le entità (per esempio «La funzione seno è un numero primo» o «Tutti i filtri dividono $\sqrt{2}$») e per ciò stesso non interpretabili. Per evitare tali confusioni, è ormai abituale stabilire una gerarchia dei tipi di entità e stratificare gli enunciati relativamente a questa gerarchia. Si porrà che gli elementi dell'insieme A base di $\mathcal{U}$ sono di tipo 0, che una relazione binaria i cui argomenti sono di tipo 0 è di tipo (0, 0), ecc. (definizione ricorsiva), e si autorizzeranno soltanto le formule «stratificate» per le quali ci sia coerenza dei tipi.

Una volta prese queste precauzioni sintattiche si può mostrare che *tutti i risultati della teoria del primo ordine restano validi per* $\mathcal{U}$.

È quindi lecito applicarli. Sia $\Sigma = \mathrm{Th}\,\mathcal{U}$ l'insieme degli enunciati di L validi in $\mathcal{U}$. $\mathcal{U}$ è un modello di Σ che viene detto modello o universo standard, si dice modello non standard ogni estensione elementare e in senso proprio $^*\mathcal{U}$ di $\mathcal{U}$.

Per maggiore comodità si continuerà ad indicare con $^*\mathbf{R}$ un universo non standard dell'analisi.

Ma ciò che è essenziale è il fatto che, ormai, ogni entità ϑ costruita a partire da $\mathbf{R}$ ammette per costruzione (automaticamente e in modo uniforme) una estensione non standard $^*\vartheta$ dello stesso tipo, costruita a partire da $^*\mathbf{R}$ e che possiede le stesse proprietà del primo ordine di ϑ. Per esempio $^*\mathbf{R}$ è archimedeo relativamente a $^*\mathbf{N}$ poiché l'enunciato

$$\forall x \in \mathbf{R}(x \neq 0 \Rightarrow \forall y \in \mathbf{R}\, \exists n \in \mathbf{N}(|nx| > |y|))$$

essendo valido in $\mathbf{R}$ è valido automaticamente in $^*\mathbf{R}$:

$$\forall x \in {}^*\mathbf{R}(x \neq 0 \Rightarrow \forall y \in {}^*\mathbf{R}\, \exists n \in {}^*\mathbf{N}(|nx| > |y|)).$$

Ma la manipolazione degli «universi» non standard esige ancora una precauzione essenziale. Infatti l'insieme $\mathcal{U}$ è gerarchizzato dalla relazione insiemista di appartenenza $\in$. La stessa cosa avviene per $^*\mathcal{U}$. Ma in $^*\mathcal{U}$ esiste anche la relazione $^*\in$ che è l'estensione della relazione ristretta a $\mathcal{U}$. Ora, le relazioni $^*\in$ e $\in$ di $^*\mathcal{U}$ non sono identiche. $\mathcal{U}$ è, per costruzione, «completo» relativamente a $\in$. Ma $^*\mathcal{U}$ non è «completo» relativamente a $^*\in$. Si preciserà ora questa difficoltà che per molto tempo ha costituito un ostacolo a una dottrina coerente degli «universi» non standard.

Sia $\mathcal{U}$ l'universo di base A e $\mathcal{U} \prec {}^*\mathcal{U}$ una estensione elementare (in senso proprio). Gli elementi di $^*\mathcal{U}$ si dividono in due classi. Da una parte quelli di $\mathcal{U}$ (considerato come immerso in $^*\mathcal{U}$), detti entità standard. Dall'altra quelli di $^*\mathcal{U} - \mathcal{U}$, detti entità non standard. Se $\vartheta \in \mathcal{U}$ è una entità standard di $^*\mathcal{U}$, si continuerà spesso con l'indicarla con ϑ (invece che con $^*\vartheta$).

Sia ϑ un elemento di $\mathcal{U}$. Essendo $\mathcal{U}$ una gerarchia insiemista, ϑ è in generale un insieme (eccetto quando ϑ è un *Urelement* della base A). Ora, come entità standard di $^*\mathcal{U}$, ϑ è anche un insieme. Ma ciò non implica che ϑ sia un insieme standard (cioè che ϑ sia composto solo da elementi standard). Si supponga per esempio che $A = \mathbf{R}$, e che ϑ sia un intervallo $[a, b]$. L'entità standard ϑ di $^*\mathcal{U}$ che possiede la stessa denotazione $[a, b]$ è composta non soltanto dai numeri reali standard $x \in [a, b]$, ma anche dai numeri reali non standard $x + \xi$ ove $x \in]a, b[$ e ξ è infinitesimale. Piú in generale: se gli elementi di $\vartheta \in \mathcal{U}$ sono definiti in $\mathcal{U}$ dalla formula $a \in \vartheta$, questa formula, interpretata in $^*\mathcal{U}$, definisce gli elementi standard $a\, {}^*\!\in \vartheta$ di $\vartheta \in {}^*\mathcal{U}$. Ma gli elementi di $^*\vartheta \in {}^*\mathcal{U}$ sono definiti in $^*\mathcal{U}$ dalla formula $a \in {}^*\vartheta$. Ora, quest'ultima *non è* identica alla formula $a\, {}^*\!\in \vartheta$. Sussiste il seguente risultato banale:

PROPOSIZIONE. Se ϑ è finita, allora $^*\vartheta = \vartheta$ (come insieme).

Osservazione: Per non fare un uso continuo degli aggettivi standard e non standard, si adotterà la regola seguente: le entità e le proprietà standard saran-

no citate senza tale qualificativo. Le entità e le proprietà non standard corrispondenti saranno precedute da un $*$. Un insieme $*$-finito di $*\mathfrak{U}$ sarà per esempio un insieme di cardinale $\alpha \in *\mathbf{N}$, ecc.

Il problema è dunque che se $\mathfrak{U}$ è «l'universo di discorso» di base A, $*\mathfrak{U}$ non è in generale l'universo del discorso di base $*A$: relativamente a $\in$, $*\mathfrak{U}$ è «incompleto», esso non contiene tutti i sottoinsiemi degli insiemi che lo costituiscono. Si dice che $*\mathfrak{U}$ è un modello non regolare nel senso di Henkin [1949; 1950].

Si consideri per esempio una estensione elementare stretta $\mathbf{R} < *\mathbf{R}$. Come sottoinsieme (nell'«universo» globale della teoria degli insiemi preso in considerazione) di $*\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ è perfettamente definito. Come entità standard di $*\mathfrak{U}$, $\mathbf{R}$, denotato dallo stesso simbolo della base $\mathbf{R}$ di $\mathfrak{U}$, è l'insieme dei numeri $x+\xi$ ove $x \in \mathbf{R}$ (standard) e ξ è o nullo o infinitesimale. È possibile perciò dire che $\mathbf{R}$ (relativamente a $*\mathfrak{U}$) è l'insieme dei numeri reali finiti. Ma questo insieme non ha nessun equivalente nella base $\mathbf{R}$ di $\mathfrak{U}$. Se infatti ne avesse uno, poiché l'inclusione stretta $\mathbf{R} \subset *\mathbf{R}$ in $*\mathfrak{U}$ «ridiscende» in $\mathfrak{U}$, si otterrebbe una inclusione stretta $F \subset \mathbf{R}$, ove F sarebbe l'insieme dei numeri «finiti» di $\mathbf{R}$ (standard): è chiaro che una tale espressione è senza significato. Ciò conduce alla seguente definizione fondamentale: sia X un $*$-insieme (cioè un elemento di $*\mathfrak{U}$). Si indichi con $\hat{X}$ l'insieme dei suoi $*$-elementi. $\hat{X} = \{x *\in X\}$. Tra i sottoinsiemi di $\hat{X}$ ci sono i suoi $*$-sottoinsiemi, cioè gli $\hat{Y}$ per $Y *\subseteq X$ con $Y \in *\mathfrak{U}$. Ma in generale ce ne sono anche degli altri.

DEFINIZIONE. *Sia $X \in *\mathfrak{U}$ un $*$-insieme e $\hat{X}$ l'insieme dei suoi $*$-elementi. Un sottoinsieme di X è detto interno se è della forma $\hat{Y}$ per un $*$-sottoinsieme Y di X; altrimenti è detto esterno. Poiché tutte le entità sono assimilabili a sottoinsiemi, si parlerà dunque di entità interne e esterne di $*\mathfrak{U}$.*

L'opposizione interno/esterno è decisiva nella misura in cui assicura la consistenza del metodo dei modelli non standard di ordine superiore attraverso la regola di quantificazione seguente:

PRINCIPIO DI QUANTIFICAZIONE NEGLI UNIVERSI NON STANDARD. Gli enunciati della teoria Σ di $\mathfrak{U}$ sono validi, una volta trasferiti a $*\mathfrak{U}$, soltanto se la quantificazione vi è ristretta alle entità interne.

Osservazione: Tale principio non è, per essere precisi, un «principio» poiché, per costruzione, esso è sempre assicurato. È piuttosto una regola euristica *concettualmente* necessaria per evitare paradossi. Infatti permettersi di quantificare non solo sugli *Urelemente* della base ma anche su una gerarchia di insiemi e di sottoinsiemi fa correre il rischio di *confondere* in $*\mathfrak{U}$ le relazioni $x \in X$ e $x *\in X$ cosí come anche $X \subseteq Y$ e $X *\subseteq Y$.

Esempio.

Sia $*\mathbf{N}$ un modello non standard di $\mathbf{N}$. Sia φ l'enunciato del primo ordine di L che esprime che ogni sottoinsieme di $\mathbf{N}$ ha un primo elemento. Questo

enunciato è valido in $*\mathbf{N}$. Ora, sia $*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ l'insieme degli interi «infiniti». È chiaro che esso non potrebbe comportare primi elementi poiché se α è «infinito», $\alpha - 1$ è ancora «infinito». Apparentemente, una contraddizione. Ma essa si trasforma in teorema se si fa uso della regola euristica su accennata.

TEOREMA. *Il sottoinsieme $*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ di $*\mathbf{N}$ è un sottoinsieme esterno.*

Si dànno alcuni criteri per riconoscere entità interne:

a) Se X è standard, allora X è interno.
b) Se X è un insieme standard di cui tutti gli $*$-elementi sono standard (in particolare se X è finito, per la proposizione di p. 491), tutti i suoi $*$-sottoinsiemi sono interni.

Ma il criterio piú efficace afferma che se X è già interno tutti i suoi sottoinsiemi definibili in $\mathfrak{L}$ sono interni. Piú specificatamente:

c) TEOREMA (criterio di internalità). *Sia X un $*$-insieme di $*\mathfrak{U}$ e $Y \subseteq \hat{X}$. Y è interno se e solo se esistono una formula $\varphi(y_1, \ldots, y_n, x)$ di $\mathfrak{L}$ e degli $a_1, \ldots, a_n \in *\mathfrak{U}$ tali che $Y = \{x \in X \mid \varphi(a_1, \ldots, a_n, x)\}$.*

Infine, per concludere questa esposizione della teoria elementare dei modelli, si indica un tipo particolare di modelli non standard (individuati da Robinson) di cui si farà uso nel seguito.

Si consideri su $\mathbf{R}$ la relazione binaria $R(x, y) \equiv x < y$. R possiede la proprietà seguente: se essa ammette una «soluzione» per un numero finito di elementi del suo dominio, essa ammette una «soluzione comune», cioè: se $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$, esiste un $y \in \mathbf{R}$ tale che $x_1 < y, \ldots, x_n < y$. Affermare che esistono in una estensione $*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$ numeri «infiniti» significa proprio dire che esiste una «soluzione» di R «comune» a tutti gli elementi del suo dominio standard.

Onde la generalizzazione:

DEFINIZIONE. *Sia R una relazione binaria di $\mathfrak{U}$ di dominio D_R. Si dice che R è concorrente se $\forall x_1, \ldots, \forall x_n \in D_R \exists y (R(x_1, y) \wedge \ldots \wedge R(x_n, y))$ è sempre valido in $\mathfrak{U}$ (qualunque sia n).*

DEFINIZIONE. *Un modello non standard $*\mathfrak{U}$ di $\mathfrak{U}$ è un allargamento se per ogni relazione concorrente R di $\mathfrak{U}$, l'enunciato $\exists y *\in D_{*R} \forall x \in D_R (R(x, y))$ è valido in $*\mathfrak{U}$.*

TEOREMA. *Ogni universo $\mathfrak{U}$ ammette degli allargamenti.* (È possibile mostrare che si possono ottenere degli allargamenti $*\mathfrak{U}$ come ultrapotenze di $\mathfrak{U}$ imponendo delle ulteriori condizioni sull'ultrafiltro D).

Dimostrazione (Robinson): Si introduce per ogni relazione concorrente R di $\mathfrak{U}$ un nuovo simbolo α_R (destinato a denotare la «soluzione» comune di $\forall x \in D_R R(x, y)$). Sia $\wedge_R$ l'insieme di enunciati $\{R(a, \alpha_R)\}_{a \in D_R}$ e sia $\Sigma_C = \Sigma \bigcup_{R \in C} \bigcup \wedge_R$ (ove C è l'insieme delle relazioni concorrenti di $\mathfrak{U}$ e Σ la teoria

di $\mathfrak{A}$ relativamente a $\mathfrak{L}$). Un allargamento di $\mathfrak{A}$ è per definizione un modello di Σ_C. Per i teoremi di completezza e di compattezza, è sufficiente mostrare che ogni sottoinsieme di Σ_C della forma $\Sigma_f = \Sigma \cup \wedge_f$ (dove $\wedge_f$ è un sottoinsieme finito di $\bigcup_{R \in C} \wedge_R$) ammette un modello. Si consideri un tale $\wedge_f$. È un insieme finito di enunciati $R_i(a_j, \alpha_i)$ (dove $\alpha_i = \alpha_{R_i}$). Ma per ogni i, essendo R_i concorrente ed essendo gli a_j in numero finito, α_i è riferibile a un elemento di $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ è dunque un modello Σ_f: Σ_C ammette un modello.

Gli allargamenti sono dei modelli non standard «abbastanza grossi» da far sí che l'opposizione interno/esterno sia nello stesso tempo operatoria e uniforme. Esistono in particolare «abbastanza» entità non standard come è mostrato dai due risultati seguenti:

PROPOSIZIONE. Sia $^*\mathfrak{A}$ un allargamento di $\mathfrak{A}$ e $X \in \mathfrak{A}$ un insieme infinito. $^*X$ ammette un $*$-elemento non standard.

PROPOSIZIONE. Sia $^*\mathfrak{A}$ un allargamento di $\mathfrak{A}$ e $X \in \mathfrak{A}$ un insieme infinito. $\hat{X}$ ammette un sottoinsieme esterno.

Il fatto che in un allargamento *tutte* le relazioni concorrenti ammettano una «soluzione globale» è una proprietà molto forte. In particolare, se X è un insieme infinito di $\mathfrak{A}$, la relazione $x \in y$ (ove y è un sottoinsieme finito di X) è concorrente. Dunque esiste in $^*\mathfrak{A}$ un insieme $*$-finito che contiene X: ogni entità infinita di $\mathfrak{A}$ può essere immersa in una entità $*$-finita (dello stesso tipo) di $^*\mathfrak{A}$. Ciò è cruciale per comprendere la «relativizzazione» dell'opposizione finito/infinito.

3. *Analisi non standard.*

A questo punto si dispone di abbastanza strumenti per mostrare come l'analisi possa essere riformulata nello stile di Leibniz. Non si tratta però in questa sede di dare un'esposizione teorica dei risultati ottenuti con questo metodo; ci si limiterà dunque ad illustrare con qualche esempio come l'uso di modelli non standard [per le basi dell'analisi non standard cfr. Robinson 1961 e 1966; Machover e Hirshfeld 1969; Luxemburg 1973] di **R** consenta:

a) di semplificare considerevolmente i concetti di base dell'analisi classica e della topologia generale;
b) di chiarire concettualmente certe intuizioni paradossali;
c) di «riportare» l'infinito al finito;
d) di fornire una rappresentazione per alcune costruzioni molto astratte.

Tali diversi risultati si collocano a livelli di difficoltà eterogenei. Nei casi semplici saranno ripresentati i risultati classici. In quelli piú complessi verranno supposti acquisiti.

Ma prima di arrivare ad essi, ecco un risultato *negativo*.

3.1. La limitazione interna dell'analisi non standard.

A priori, poiché un modello non standard (d'ora in poi abbreviato n. s.) $^*\mathbf{R}$ di **R** è un'estensione elementare (in senso proprio) e poiché la sua teoria fa intervenire il simbolo supplementare $*$, si potrebbe credere che l'analisi n. s. sia una teoria «piú forte» dell'analisi standard. Nulla di tutto ciò. Sia $\mathfrak{S}$ il sistema formale che codifica la pratica dell'analisi standard: $\mathfrak{S}$ è essenzialmente il linguaggio della teoria degli insiemi (teoria dei tipi) dotato dei suoi assiomi, dello schema di induzione e dell'assioma della scelta. Sia $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ il sistema formale che codifica la pratica dell'analisi n. s.: $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ è esteso in modo essenziale grazie all'aggiunta del nuovo simbolo $*$, del rafforzamento dello schema d'induzione e dell'assioma della scelta, dell'assioma affermante che i modelli n. s. sono estensioni elementari, di quello affermante che tali estensioni sono estensioni proprie, di quello, infine, che definisce gli allargamenti. Kreisel [1969] ha mostrato il seguente risultato di limitazione:

TEOREMA. *L'estensione $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ di $\mathfrak{S}$ è inessenziale (conservativa): ogni formula di $\mathfrak{S}$ derivabile da $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ è derivabile da $\mathfrak{S}$.*

Questo risultato, se mostra che l'analisi n. s. si riduce a una «riformulazione» dell'analisi s., non limita tuttavia per nulla la sua portata euristica e strategica. È proprio a questa che sono dedicate le pagine seguenti.

3.2. $^*\mathbf{N}$ e $^*\mathbf{R}$.

Sia $^*\mathbf{N}$ un modello n. s. di **N**. ($\mathbf{N} < {}^*\mathbf{N}$ può essere ottenuto come ultrapotenza dall'esempio di p. 487). Per il teorema di p. 493 il sottoinsieme $^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ degli interi «infiniti» (infiniti relativamente a **N**) di $^*\mathbf{N}$ è esterno. La stessa cosa accade per **N**.

Poiché **N** e $^*\mathbf{N}$ hanno la stessa teoria, per distinguerli si ricorre al loro tipo d'ordine. Siccome l'enunciato «Non esistono interi fra n e $n+1$» è del primo ordine, è valido in $^*\mathbf{N}$. **N** è dunque un segmento iniziale di $^*\mathbf{N}$ (tutti gli elementi di $^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ sono maggiori di tutti gli elementi di **N**, sono cioè infiniti).

Si consideri su $^*\mathbf{N}$ la relazione $a \sim b$ se e solo se $|a-b| \in \mathbf{N}$. È una relazione di equivalenza che scompone $^*\mathbf{N}$ in classi di equivalenza (la classe individuata da 0 è **N** tutto intero). Sia G_a la classe di equivalenza di $a \in {}^*\mathbf{N}$. G_a è un intervallo. Se infatti $a \sim b$ (cioè $b \in G_a$) e $a < c < b$, allora $a \sim c \sim b$ (cioè $c \in G_a$). Se $a \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$, G_a ha il tipo d'ordine $\omega^* + \omega$ di **Z**. L'ordinale α di $^*\mathbf{N}$ è dunque di tipo $\alpha = \omega + (\omega^* + \omega)\vartheta$, dove ϑ è un ordinale dipendente da $^*\mathbf{N}$. (Come d'uso, si è indicato con ω il tipo d'ordine – l'ordinale – di **N**; ω^* è il tipo dell'ordine inverso).

Sussiste il teorema:

TEOREMA (Henkin, Kemeny). *ϑ è denso senza primo ed ultimo elemento.*

Per avere una descrizione piú fine di $^*\mathbf{N}$, si può considerare una ultrapotenza $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/D$ (dove D è un ultrafiltro libero su $I = \mathbf{N}$) e studiare come i numeri

di tipo $*f(a)$ (in cui $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ è una funzione standard) si distribuiscono in $*\mathbf{N}$. L'idea è di raggruppare fra di loro gli elementi di $\mathbf{N}_\infty = *\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ che sono reciprocamente accessibili [cfr. Puritz 1972] mediante le $*f$ e di leggere nella struttura di $\mathbf{N}_\infty$ certe proprietà dell'ultrafiltro D associato a $*\mathbf{N}$. Ma non si approfondirà qui tale punto.

Si consideri ora la struttura di un modello n. s. $*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$. Si osservi anzitutto che $\mathbf{R}$ può essere ottenuto a partire da un modello n. s. di $\mathbf{Q}$. Sia infatti $*\mathbf{Q}$ un allargamento di $\mathbf{Q}$. In primo luogo nella estensione $*\mathbf{Q}$ di $\mathbf{Q}$ tutte le «sezioni» di $\mathbf{Q}$ – cioè le coppie (D_1, D_2) di sottoinsiemi di $\mathbf{Q}$ tali che $D_1 < D_2$ – sono «riempite»: se $D_1 < D_2$ è una sezione, esiste un $y \in *\mathbf{Q}$ tale che $D_1 < y < D_2$. Infatti la relazione «$x \in D_1 \cup D_2$ e esiste un y tale che $x < y$ se $x \in D_1$ o $y < x$ se $x \in D_2$» è banalmente concorrente. Ammette dunque una «soluzione globale» in $*\mathbf{Q}$ poiché $*\mathbf{Q}$ è un allargamento.

Sia allora $*\mathbf{Q}_f$ l'insieme degli elementi finiti di $*\mathbf{Q}$ cioè l'insieme degli $x \in *\mathbf{Q}$ tali che esiste un $y \in \mathbf{Q}$ con $|x| < |y|$. $*\mathbf{Q}_f$ è un sottoanello del corpo $*\mathbf{Q}$. Non è un corpo poiché esso contiene degli infinitesimi i cui inversi sono «infiniti». Sia μ l'insieme degli infinitesimi di $*\mathbf{Q}$. È facile verificare che μ è un ideale di $*\mathbf{Q}_f$ (la differenza di due infinitesimi è infinitesimale e il prodotto di un infinitesimo per un numero finito è infinitesimale).

PROPOSIZIONE. $\mathbf{R} \simeq *\mathbf{Q}_f/\mu$.

Dimostrazione: Per costruzione, $*\mathbf{Q}_f/\mu$ «completa» $\mathbf{Q}$, cioè «riempie» le sue lacune. D'altra parte $\mathbf{Q}$ è denso in $*\mathbf{Q}_f/\mu$. $\mathbf{R}$ è il solo corpo ordinato completo nel quale $\mathbf{Q}$ sia denso.

Sia dato ora un modello n. s. $*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$. $*\mathbf{R}$ è un corpo ordinato che non è archimedeo relativamente a $\mathbf{N}$ ma che è archimedeo relativamente a $*\mathbf{N}$. Come già si è detto, è equivalente affermare che $\mathbf{R}$ è archimedeo e che $\mathbf{R}$ non contiene infinitesimi. $*\mathbf{R}$ contiene dunque infinitesimi relativamente a $\mathbf{R}$, ma non relativamente a $*\mathbf{R}$.

Sia $*\mathbf{R}_f$ l'anello degli elementi finiti di $*\mathbf{R}$ e μ l'ideale di $*\mathbf{R}_f$ costituito dagli infinitesimi di $*\mathbf{R}$. Si ha allora la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE. $*\mathbf{R}_f/\mu \simeq \mathbf{R}$.

Dimostrazione: Sia dato un $x \in *\mathbf{R}_f$ e si indichi con $\tilde{x} = x + \mu$ la sua classe di equivalenza. $\tilde{x}$ contiene uno e uno solo reale standard $\mathrm{st}(x)$.

a) Se $\mathrm{st}(x)$ esiste è unico. Siano dati infatti $y, z \in \mathbf{R} \cap \tilde{x}$ e si supponga $y \neq z$. Allora $|y - z| \notin \mu$, cioè y e z non sono equivalenti. Contraddizione. $y = z$.

b) $\mathrm{st}(x)$ esiste. Si consideri infatti $a \in \tilde{x}$. Sia a standard e allora si conclude. Sia a non standard e si divida $\mathbf{R}$ in due classi D_1 e D_2: $D_1 = \{y \in \mathbf{R} \mid y < a\}$ e $D_2 = \{y \in \mathbf{R} \mid y > a\}$. D_2 è non-vuota poiché x è finito per ipotesi. D_1 è non-vuota poiché se $|a| < m$, $-m \in D_1$. In piú $D_1 < D_2$. (D_1, D_2) è dunque una sezione di Dedekind che definisce un numero reale $r \in \mathbf{R}$. Occorre mostrare che $r \in \tilde{x}$. Si supponga per esempio che $r = \max D_1$ (la dimostrazione è la stessa per

$r = \min D_2$). Siccome a non è standard, $a - r > 0$. Se $a - r \notin \mu$, esiste un $\delta > 0$ tale che $a - r \geq \delta$. In questo caso $a > r + (\delta/2)$ e dunque $r + (\delta/2) \in D_1$ e $r < \max D_1$. Contraddizione. $a - r \in \mu$, cioè $r \in \tilde{a} = \tilde{x}$.

È banale verificare che la biiezione $\mathrm{st} : *\mathbf{R}_f/\mu \to \mathbf{R}$ è un morfismo di corpi.

DEFINIZIONE. *Si chiama parte standard di $x \in *\mathbf{R}_f$ e la si indica con ${}^0x$ il numero reale* $\mathrm{st}(x)$.

DEFINIZIONE. *Se $x \in *\mathbf{R}$, si chiama monade di x, e si indica con $\mu(x)$, il traslato $x + \mu$ dell'ideale μ degli infinitesimi (monade di 0).*

Osservazione: Si ritrova proprio la struttura di $*\mathbf{R}$ anticipata a p. 465.

PROPOSIZIONE. I sottoinsiemi $\mathbf{R}$, $*\mathbf{R}_f$, $*\mathbf{R}_\infty = \mathbf{R} \setminus *\mathbf{R}_f$, $\mu(x)$ di $*\mathbf{R}$ sono tutti esterni.

Dimostrazione: Se $\mathbf{R}$ fosse interno, $\mathbf{N} = \mathbf{R} \cap *\mathbf{N}$ lo sarebbe relativamente a $*\mathbf{N}$. Ciò è escluso dal teorema *c*) di p. 493. La stessa cosa accade per $*\mathbf{R}_f$ poiché $\mathbf{N} = *\mathbf{R}_f \cap *\mathbf{N}$. Poiché $*\mathbf{R}_\infty$ è il complementare di $*\mathbf{R}_f$ è esso stesso interno. Quanto a $\mu(x)$ si supponga che esista un $a \in *\mathbf{R}$ tale che $\mu(a)$ sia interno. Allora $\mu = \mu(a) - a$ sarebbe interno cosí che $*\mathbf{R}_\infty = \mu^{-1}$.

Si dànno ora alcune indicazioni sulla struttura non piú di $*\mathbf{R}_f$ ma di $*\mathbf{R}$. Sia G_x la cosiddetta galassia di un elemento $x \in *\mathbf{R}$, cioè $G_x = \{y \in *\mathbf{R} \mid |x - y| \in \mathbf{R}\}$. La galassia di 0, G_0, è l'anello $*\mathbf{R}_f$. Si può considerare il gruppo additivo ordinato delle galassie $*\mathbf{R}/G_0$ e inoltre il gruppo additivo ordinato delle monadi $*\mathbf{R}/\mu$; si indichi con $*\mathbf{R}^+$ il gruppo moltiplicativo ordinato degli elementi strettamente positivi di $*\mathbf{R}$. Due elementi $x, y \in *\mathbf{R}^+$ sono detti dello stesso ordine di grandezza se il loro quoziente è finito ma non infinitesimale: $(x/y) \in G_0 \setminus \mu$. L'ordine di grandezza è una relazione di equivalenza. Si indichi con $R_a = R(a)$ la classe d'equivalenza di $a \in *\mathbf{R}^+$: ponendo $y = 1$, si vede che R_1 è esattamente la parte positiva di $G_0 \setminus \mu$. R_1 è un sottogruppo moltiplicativo ordinato di $*\mathbf{R}^+$. Il gruppo moltiplicativo ordinato quoziente $*\mathbf{R}^+/R_1$ è detto gruppo di valutazione di $*\mathbf{R}$. Sussiste il teorema seguente:

TEOREMA (Zakon).

1) $*\mathbf{R}/G_0 \simeq *\mathbf{R}^+/R_1$.
2) $*\mathbf{R}/G_0$ *e* $*\mathbf{R}^+/R_1$ *sono divisibili, non archimedei, con ordine denso e totalmente incompleti (vi esistono delle lacune in ogni intervallo aperto).*
3) $*\mathbf{R}/G_0$ *è d'ordinale* $\vartheta^* + 1 + \vartheta$ *in cui* ϑ *è l'ordinale che definisce il tipo di ordine* $\alpha = \omega + (\omega^* + \omega)\vartheta$ *di* $*\mathbf{N}$ (cfr. sopra, p. 495, il teorema di Henkin e di Kemeny).

COROLLARIO. Siano δ, $*\delta$, δ_G e δ_μ gli ordinali rispettivi di $\mathbf{R}$, $*\mathbf{R}$, $G_0 = *\mathbf{R}_f$ e μ.

1) $*\delta = \delta_G(\vartheta^* + 1 + \vartheta)$ $\quad \delta_G = \delta_\mu \delta$ $\quad \delta_\mu = \delta_G \vartheta + 1 + \delta_G \vartheta^*$.
2) $*\mathbf{R}$, μ e $*\mathbf{R}_f = G_0$ sono totalmente incompleti e non archimedei.

3.3. Elementi di analisi classica.

L'analisi n. s. permette di riformulare in modo intuitivo («geometrico» relativamente alla «fibrazione» di $^*\mathbf{R}$ operata dalle monadi) i concetti e i teoremi dell'analisi classica. Eccone alcuni esempi.

Successioni. Sia $S=(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di numeri reali.

DEFINIZIONI. 1) *Si dice che S è limitata se esiste un $M\in\mathbf{R}$ tale che $|s_n|<M$ per ogni $n\in\mathbf{N}$.* 2) *Si dice che S ammette s come limite* ($\lim s_n=s$) *se per ogni $\varepsilon>0$ esiste un $N\in\mathbf{N}$ tale che $n>N$ implica $|s_n-s|<\varepsilon$.* 3) *Si dice che $s\in\mathbf{R}$ è un punto limite (o punto di accumulazione) di S se per ogni $\varepsilon>0$ e per ogni $N\in\mathbf{N}$ esiste un $n>N$ tale che $|s_n-s|<\varepsilon$.*

Queste definizioni classiche sono formulate nello stile Cauchy-Weierstrass. Ma una successione S di numeri reali è un'applicazione $S:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$; essa si estende dunque automaticamente a un modello n. s. $^*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$ in una successione $*$-numerabile $^*S:{}^*\mathbf{N}\to{}^*\mathbf{R}$. Si denoterà ora con ω un intero infinito qualunque di $^*\mathbf{N}_\infty={}^*\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}$.

PROPOSIZIONE. La successione $S=(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è limitata se e solo se s_ω è finito per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$.

Ne è agevole la dimostrazione.

PROPOSIZIONE. $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ se e solo se $s_\omega\simeq s$ per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$ (dove $x\simeq y$ denota «x e y sono infinitamente vicini»).

Dimostrazione: Si supponga $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ e si voglia mostrare che per ogni $\varepsilon>0$ ($\varepsilon\in\mathbf{R}$) e per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$, $|s_\omega-s|<\varepsilon$. $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ si esprime, come si è detto sopra, con l'enunciato:

(1) $\quad\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbf{N}(n>N\Rightarrow|s_n-s|<\varepsilon)$

Dato $\varepsilon>0$, sia N l'intero standard di cui la (1) afferma l'esistenza. L'enunciato

(2) $\quad n>N\Rightarrow|s_n-s|<\varepsilon$

è valido in $\mathbf{R}$ e dunque in $^*\mathbf{R}$. Siccome $\omega>N$ per ogni $N\in\mathbf{N}$, $|s_\omega-s|<\varepsilon$.

Viceversa, si supponga $s_\omega\simeq s$ per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$. Siano $\varepsilon>0$ ($\in\mathbf{R}$) e $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$. L'enunciato

(3) $\quad\forall n(n>\omega\Rightarrow|s_n-s|<\varepsilon)$

è valido in $^*\mathbf{R}$. Esso non è definito in $\mathbf{R}$ a causa della costante ω. Ma l'enunciato

(4) $\quad\exists w\,\forall n(n>w\Rightarrow|s_n-s|<\varepsilon)$

è definito in $\mathbf{R}$ e valido in $^*\mathbf{R}$. È dunque valido in $\mathbf{R}$ ove può essere riscritto con $\exists N\,\forall n(n>N\Rightarrow|s_n-s|<\varepsilon)$.

Nello stesso spirito, si può dimostrare anche la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE. I punti limite di S sono le parti standard ${}^0s_\omega$ degli s_ω finiti.

Banalizzazione del teorema di Bolzano-Weierstrass. Un importante teorema sulle successioni è quello di Bolzano-Weierstrass. Esso afferma che se una successione è limitata, allora ammette un punto limite. Tale teorema è fondamentale nella misura in cui si nota che è alla base della nozione di compattezza in topologia generale (cfr. oltre, p. 503). La sua dimostrazione nello stile Cauchy-Weierstrass è elementare ma non è affatto banale, non deriva cioè direttamente dalle definizioni.

Se invece si prendono come nuove definizioni le caratterizzazioni n. s. presentate sopra (pp. 498-99), questo teorema diventa banale.

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS. *Se una successione è limitata, essa ammette un punto limite.*

Dimostrazione: Se S è limitata, s_ω è finito per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$. Sia dato un $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$, $s={}^0s_\omega$ è un punto limite di S.

Generalmente molti risultati si «banalizzano» nella analisi n. s. riconducendoli a proprietà puramente insiemistiche delle monadi.

Il criterio di convergenza di Cauchy. Il celebre criterio di convergenza di Cauchy afferma che una successione converge se la differenza dei suoi termini si annulla all'infinito. Eccone una dimostrazione n. s.

TEOREMA. *Una successione $S=(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge se e solo se* $\lim\limits_{n,m\to\infty}(s_n-s_m)=0$.

Dimostrazione: $\lim\limits_{n,m\to\infty}(s_n-s_m)=0$ si riformula in termini n. s. nell'enunciato

(5) $\quad s_\mu\simeq s_\nu$

per tutti i $\mu,\nu\in{}^*\mathbf{N}_\infty$. Si supponga che S converga e abbia limite s. $s_\omega\simeq s$ per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$ e dunque la (5) è valida. Viceversa si supponga che essa sia valida. Se si mostra che per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$, s_ω è finito, allora tutti gli s_ω hanno la stessa parte standard s e S converge verso s. Sia dunque $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$ e si supponga s_ω infinito. Si consideri l'insieme $A=\{n\in{}^*\mathbf{N}\mid|s_\omega-s_n|<1\}$. A è un insieme interno. Ma $A={}^*\mathbf{N}_\infty$ poiché 1) essendo s_ω infinito ed essendo s_n finito per $n\in\mathbf{N}$, $A\subset{}^*\mathbf{N}_\infty$; 2) se $\rho\in{}^*\mathbf{N}_\infty$, $s_\omega\simeq s_\rho$ per ipotesi e dunque $|s_\omega-s_\rho|<1$. Ora per il teorema di p. 493 $^*\mathbf{N}_\infty$ è esterno. Contraddizione. s_ω è sempre finito e S converge verso ${}^0s_\omega$.

Continuità. Sia data una funzione $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Essa si prolunga automaticamente a una funzione $^*f:{}^*\mathbf{R}\to{}^*\mathbf{R}$.

PROPOSIZIONE. f è continua in x_0 se e solo se $x\simeq x_0$ implica $^*f(x)\simeq f(x_0)$.

Dimostrazione: Per definizione f è continua in x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, cioè (nello stile Cauchy-Weierstrass) se l'enunciato

$$(6)\qquad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

è valido. Se f è continua in x_0, poiché la (6) è valida in **R**, è valida in ***R**. Sia dato un $x\in{}^*\mathbf{R}$ tale che $x\simeq x_0$. $|x-x_0|<\delta$ per ogni $\delta>0$ ($\delta\in\mathbf{R}$) e dunque $|{}^*f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ per ogni $\varepsilon>0$ ($\varepsilon\in\mathbf{R}$) cioè ${}^*f(x)\simeq f(x_0)$.

Viceversa, se per ogni $x\simeq x_0$ ($x\in{}^*\mathbf{R}$) ${}^*f(x)\simeq f(x_0)$, per $\varepsilon>0$ e $h\in\mu$ l'enunciato

$$(7)\qquad \forall x(|x-x_0|<h \Rightarrow |{}^*f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

è valido in ***R**. La (7) non è definita in **R** a causa della costante h. Ma l'enunciato

$$\exists h\,\forall x(|x-x_0|<h \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

è definito in **R** e valido in ***R**. Di conseguenza è valido in **R**.

Osservazione: Questa proposizione permette di «visualizzare» (e dunque di rendere concettualmente intuitiva) la proprietà non intuitiva di continuità. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ è continua se per ogni $x\in\mathbf{R}$ ${}^*f(\mu(x))\subseteq\mu(f(x))$, cioè se ${}^*f$ rispetta la «fibrazione» di ***R** operata dalle monadi (cfr. fig. 9).

Derivabilità. PROPOSIZIONE. f è derivabile in x_0 se tutti i quozienti

$$\frac{{}^*f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

in cui $x\in\mu(x_0)$ hanno la stessa parte standard (indicata con $f'(x_0)$: derivata di f in x_0).

Dimostrazione: f è derivabile in x_0 se il limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ (=f'(x_0))$$

esiste. La dimostrazione è analoga a quella della proposizione di p. 498.

PROPOSIZIONE. Se f è derivabile in x_0, essa è continua in x_0.

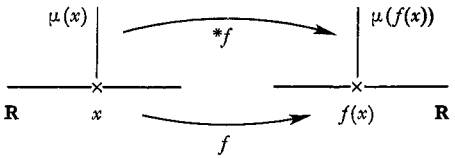


Figura 9.
«Visualizzazione» della continuità.

Dimostrazione: Per ogni $x\simeq x_0$, $x\neq x_0$, ${}^*f(x)\simeq f(x_0)$ poiché ${}^*f(x)-f(x_0)\simeq$ $\simeq f'(x_0)(x-x_0)$.

Osservazione: La derivata è dunque in un certo senso proprio il quoziente df/dx; ma poiché tale quoziente può essere n. s., di fatto viene identificata con la sua parte standard. È contraddittorio imporre che il quoziente di due infinitesimi sia sempre standard. Proprio tale inconsistenza è all'origine della rimozione dell'infinitesimale leibniziano.

Differenziali. A questo punto si può riprendere la caratterizzazione del dx leibniziano come simbolo-indice «dimezzato» che era all'origine del chiarimento logico-concettuale del paradosso dell'infinitesimale. Sia dx il simbolo-indice associato all'insieme μ degli infinitesimi di ***R**. Siccome $\mu\cap\mathbf{R}=(0)$, dx non può riferirsi che a 0 in **R**: dx è cosí «dimezzato» relativamente a **R**. Ma relativamente a ***R** è un simbolo-indice consistente analogo a una costante per quel che concerne il simbolo e analogo a una variabile per quel che concerne l'indice.

Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione derivabile in x_0. Sia $df={}^*f(x_0+dx)-f(x_0)$. Poiché i quozienti di infinitesimi df/dx hanno tutti la stessa parte standard, è possibile separare l'aspetto-simbolo e l'aspetto-indice del dx e supporre indifferentemente che dx è o un infinitesimo particolare o un simbolo di variabile per gli elementi di μ.

3.4. Topologia generale.

Alla fine del XIX secolo e all'inizio del XX lo studio di spazi molto differenti, e in particolare degli «spazi» di funzioni, ha condotto ad astrarre e ad assiomatizzare il concetto di topologia o meglio il concetto di intorno. Si dànno qui per noti i necessari riferimenti metrici e topologici (si veda l'articolo «Geometria e topologia» in questa stessa *Enciclopedia*). Sia X uno spazio topologico. Sia $\mathcal{F}(x)$ l'insieme degli intorni di $x\in X$. È facile verificare che $\mathcal{F}(x)$ è un filtro. In generale, tale filtro non ammette un piú piccolo elemento (non è principale). Quando x varia, i filtri $\mathcal{F}(x)$ non sono indipendenti. Se U è un intorno di x, U è infatti un intorno di ogni punto y «abbastanza vicino» a x: per ogni $U\in\mathcal{F}(x)$ esiste un $V\in\mathcal{F}(x)$ tale che $U\in\mathcal{F}(y)$ per ogni $y\in V$.

A partire dalla nozione di topologia molte altre nozioni s'impongono pressoché da sole. Si dirà per esempio che un punto x è isolato se il filtro dei suoi intorni è l'ultrafiltro principale $\mathcal{F}_x=\{U\subseteq X\mid x\in U\}$. Si dirà che la topologia $\mathcal{T}$ è separata se è sempre possibile «separare» due punti differenti, cioè se per tutti gli $x\neq y$ esistono intorni disgiunti $U\in\mathcal{F}(x)$ e $V\in\mathcal{F}(y)$ di x e y. Si dirà che una successione $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ di punti di X converge verso x (ammette x come limite) se per ogni intorno aperto $U\in\mathcal{F}(x)$ esiste un $N\in\mathbf{N}$ tale che per ogni $n>N$, $x_n\in U$. Si dirà che x è un punto limite di $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se per ogni intorno aperto $U\in\mathcal{F}(x)$ e per ogni $N\in\mathbf{N}$ esiste un $n>N$ tale che $x_n\in U$. Si dirà che un'applicazione $f:X\to Y$ tra due spazi topologici è continua se l'immagine reciproca di ogni aperto di Y è un aperto di X, ecc.

Si vedrà come tutte queste nozioni di base cosí come i teoremi caratteristici ai quali dànno luogo siano riformulabili in modo puramente insiemistico nell'analisi n. s.

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e si consideri un allargamento dell'universo di base X. $\mathcal{T}$ è un insieme di sottoinsiemi di X. Sia $^*\mathcal{T}$ la sua estensione n. s.; essendo $^*\mathcal{T}$ una entità standard, i suoi elementi sono interni.

Sia $x \in X$ e $\mathcal{F}_x$ il filtro degli intorni (aperti) di x. La nuova entità che il modello n. s. consente di introdurre e di maneggiare è essenzialmente la monade di x.

DEFINIZIONE. *Sia $x \in X$. La monade $\mu(x)$ di x è l'intersezione degli $^*U$ per $U \in \mathcal{F}_x$:* $\mu(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}_x} {}^*U$.

In generale non esistono intorni di x «piú piccoli» (questo è un altro modo di dire che il concetto fondamentale dell'analisi è quello di limite). Ma si vedrà che in $^*X$ esistono «$*$-intorni» piú piccoli di tutti gli intorni di x in X. Ciò permetterà di ragionare «insiemisticamente» riportando le proprietà «infinitesimali» in X a proprietà «finite» in $^*X$.

LEMMA FONDAMENTALE. *Se $^*X$ è un allargamento di $(X, \mathcal{T})$ e se $x \in X$, esiste un $V \in {}^*\mathcal{T}$ tale che $x \in V \subset \mu(x)$.*

Dimostrazione: Si consideri la relazione binaria di dominio $\mathcal{T}$, $R(U, V)$: «$x \in V \subseteq U$». Poiché l'intersezione di un numero finito di aperti contenente x è un aperto contenente x, $R(U, V)$ è concorrente. Ammette dunque una «soluzione globale» $V \in {}^*\mathcal{T}$ tale che $x \in V \subseteq {}^*U$ per *ogni* $U \in \mathcal{T}$, $x \in U$. Siccome $\mu(x) = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ x \in U}} {}^*U$, $x \in V \subset \mu(x)$.

Ecco ora la caratterizzazione degli aperti.

PROPOSIZIONE. U è aperto se e solo se $^*U$ contiene la monade di ciascuno dei suoi punti.

Dimostrazione: Se U è aperto, per ogni $x \in U$, $U \in \mathcal{F}_x$ e dunque $\mu(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}_x} {}^*U \subset {}^*U$. Viceversa, sia $x \in {}^*U$. Siccome $\mu(x) \subset {}^*U$, l'enunciato $\exists V \in \mathcal{F}_x\, (V \subset U)$ è valido in $^*X$. È dunque valido in X. U è un intorno di x, dunque di ciascuno dei suoi punti, dunque aperto.

COROLLARIO. F è chiuso se per ogni $x \notin F$, $\mu(x) \cap {}^*F = \emptyset$.

DEFINIZIONE. *Se A è un sottoinsieme qualunque di X, si dice che un punto $x \in X$ è aderente a A se ogni intorno di x interseca A. Si chiama aderenza di A e si indica con $\bar{A}$ l'insieme dei punti aderenti ad A: essa è la chiusura di A cioè l'intersezione (che è un chiuso) dei chiusi contenenti A.*

Si ha allora la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE. Sia $A \subset X$, $x \in \bar{A}$ se e solo se $\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$.

Ecco, sempre a titolo d'esempio, la caratterizzazione della proprietà di separazione.

PROPOSIZIONE. La topologia $\mathcal{T}$ su X è separata se e solo se le monadi di due punti differenti sono sempre disgiunte.

COROLLARIO. Se X è separato, ogni punto $x \in {}^*X$ appartiene al massimo a una monade. Se $x \in \mu({}^0x)$ si dice che ^0x è la parte standard di x.

Si caratterizza infine per un punto la proprietà di essere isolato. Un punto $x \in X$ è isolato se e solo se $\mu(x) = \{x\}$. Ma Robinson ha dato una caratterizzazione piú forte.

TEOREMA. *x è isolato se e solo se la sua monade $\mu(x)$ è interna.*

Si riesamini ora il tema della compattezza cui ci si era accostati in riferimento alla banalizzazione del teorema di Bolzano-Weierstrass. Gli insiemi compatti sono gli insiemi chiusi che soddisfano la proprietà che ogni successione di punti ammette un punto limite. Intuitivamente, essi sono degli spazi abbastanza «finiti» da non consentire di «collocarvi» un insieme numerabile di punti senza «accumularli» in qualche parte. Vista la loro importanza, la tendenza è stata di caratterizzarli con una proprietà di finitezza della loro topologia (dei loro aperti) e dimostrare a posteriori un analogo del teorema di Bolzano-Weierstrass. L'analisi n. s. banalizza a sua volta la loro definizione e la loro proprietà caratteristica.

DEFINIZIONE. *Uno spazio topologico separato $(X, \mathcal{T})$ è detto compatto se da ogni ricoprimento di X con degli aperti è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.*

DEFINIZIONE. *Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Un punto x di $^*X$ è detto quasi standard (q. s.) se appartiene alla monade di un punto standard. Si indichi con $^*X_{\text{q.s.}}$ l'insieme dei punti quasi standard di $^*X$:* $^*X_{\text{q.s.}} = \bigcup_{x \in X} \mu(x)$.

TEOREMA (caratterizzazione n. s. della compattezza). *Sia X uno spazio separato, X è compatto se e solo se $^*X = {}^*X_{\text{q.s.}}$ cioè se e solo se ogni punto non standard è quasi standard.*

Dimostrazione: Si supponga che X sia compatto e che esista un $x \in {}^*X$ che non sia quasi standard. Per ogni $y \in X$ esiste dunque un aperto $y \in U$ tale che $x \notin {}^*U$. Sia $\mathcal{U} = \{U_\nu\}$ l'insieme degli $U \in \mathcal{T}$ tali che $x \notin {}^*U$. $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X. Poiché X è compatto, è possibile estrarre un ricoprimento finito $U_1, \ldots, U_k$. Ma poiché $U_1 \cup \ldots \cup U_k = X$ è un enunciato del primo ordine, $^*U_1 \cup \ldots \cup {}^*U_k = {}^*X$. Ora $x \notin {}^*U_1 \cup \ldots \cup {}^*U_k$. Contraddizione. Ogni punto di $^*X$ è quasi standard.

Viceversa si supponga X non compatto. Esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X tale che per ogni sottoricoprimento finito $\mathcal{U}_f$, $\cup \mathcal{U}_f \neq X$. Si consideri la relazione $R(U, y)$: «$U \in \mathcal{U}$, $y \in X$, $y \notin U$». Essa è concorrente. Poiché $^*X$ è un allargamento, essa ammette una «soluzione globale» $x \in {}^*X$: per *ogni* $U \in \mathcal{U}$,

$x \notin {}^*U$. *x non è* quasi standard poiché se $y \in X$, esiste un $U \in \mathfrak{U}$ tale che $y \in U$ e siccome $x \notin {}^*U$, $x \notin \mu(y)$.

COROLLARIO. Un sottoinsieme K di X è compatto se e solo se ogni punto di ${}^*K$ appartiene alla monade di un punto di K.

La proprietà classica per un compatto di essere chiuso si riconduce a banali proprietà insiemistiche delle monadi.

PROPOSIZIONE. Sia X uno spazio separato, se $K \subset X$ è compatto, K è chiuso.

Dimostrazione: Come si è visto sopra, K è chiuso se e solo se, per ogni $x \notin K$, $\mu(x) \cap {}^*K = \emptyset$. Sia dunque dato un $x \notin K$ e si supponga che esista un $y \in \mu(x) \cap {}^*K$. Siccome K è compatto esiste uno $z \in K$ tale che $y \in \mu(z)$. Si ha dunque $y \in \mu(x) \cap \mu(z)$ cioè $\mu(x) \cap \mu(z) \neq \emptyset$ e $x \notin K$ e $z \in K$ cioè $x \neq z$. Siccome X è separato si dovrebbe ottenere $\mu(x) \cap \mu(z) = \emptyset$. Contraddizione. $\mu(x) \cap \cap {}^*K = \emptyset$ per ogni $x \notin K$ e K è chiuso.

Si banalizzi ora il teorema di Bolzano-Weierstrass. In modo analogo a quanto si è fatto a p. 499, dapprima si mostra:

PROPOSIZIONE. Sia $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di punti di X (separato): x è un punto limite di $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ se e solo se esiste un $\omega \in {}^*\mathbf{N}_\infty$ tale che $x_\omega \in \mu(x)$.

COROLLARIO (teorema di Bolzano-Weierstrass). Se X è compatto ogni successione ammette un punto limite.

Dimostrazione: Sia $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di punti di X e sia $\omega \in {}^*\mathbf{N}_\infty$ un intero infinito. Siccome X è compatto, x_ω è quasi standard: esiste un $x \in X$ tale che $x_\omega \in \mu(x)$. Per la proposizione esposta sopra, x è un punto limite di $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Osservazione: La caratterizzazione n. s. della compattezza «banalizza» la definizione standard nella misura in cui riduce il livello (nella gerarchia dei tipi) delle entità messe in gioco. Come osservano Machover e Hirshfeld, «se i punti (e gli $*$-punti) sono pensati come oggetti di tipo 0, gli insiemi di punti come oggetti di tipo 1 e le famiglie di tali insiemi come oggetti di tipo 2, allora la definizione standard di compattezza è un enunciato universale-esistenziale che comporta oggetti di tipo 2 e che fa uso della nozione di oggetto finito di tipo 2 ("per ogni ricoprimento aperto di A esiste un sottoricoprimento finito"). D'altra parte, la caratterizzazione non standard è formulata come un enunciato universale-esistenziale che comporta soltanto oggetti di tipo 0. È tutto molto semplice da usare e da visualizzare. La maggior parte delle dimostrazioni che comportano argomenti di compattezza è piú diretta, semplice e naturale quando vengono usati i metodi non standard» [1969, pp. 30-31].

Questi pochi esempi di topologia generale sono sufficienti a mostrare la portata euristica e pedagogica dell'approccio n. s. Prima di ampliare ulteriormente le loro applicazioni, si delineano alcune problematiche a cui si aprono in modo naturale.

Prima di tutto è chiaro come la nozione di monade definita a partire dai filtri di intorni possa estendersi a un filtro qualunque.

Sia $\mathfrak{F}$ un filtro su un insieme X composto di entità di un tipo dato σ. Si chiamerà monade di $\mathfrak{F}$ e si noterà con $\mu(\mathfrak{F})$ la $*$-entità di tipo (σ) definita da $\mu(\mathfrak{F}) = \bigcap_{U \in \mathfrak{F}} {}^*U$.

A partire da questo punto, è possibile proporsi una teoria generale delle monadi [cfr. Luxemburg 1969]. Ecco alcune indicazioni.

Si generalizza il lemma fondamentale di p. 502: $\mu(\mathfrak{F})$ è la riunione dei $V \in {}^*\mathfrak{F}$ tali che $V \subset \mu(\mathfrak{F})$. Si generalizza la caratterizzazione del teorema delle monadi interne (p. 503):

TEOREMA (Luxemburg). *Sia $\mathfrak{F}$ un filtro su X, e sia ${}^*\mathfrak{U}$ un allargamento dell'universo $\mathfrak{U}$ cui appartiene X. La monade $\mu(\mathfrak{F})$ è interna se e solo se $\mathfrak{F}$ è principale.*

Dato un insieme Ω qualunque (interno o esterno) di entità di ${}^*\mathfrak{U}$ di tipo (σ), sia $\mathfrak{F}_\Omega$ il filtro degli insiemi A di entità di tipo σ di $\mathfrak{U}$ tali che $\Omega \subseteq {}^*A$. Si chiama monade discreta di Ω e si indica con $\mu_d(\Omega)$ la monade del filtro $\mathfrak{F}_\Omega$. $\mu_d(\Omega)$ è un modo di rappresentarsi l'allargamento $\mathfrak{U} \prec {}^*\mathfrak{U}$.

Si indichi con M_σ l'insieme «completo» delle entità di tipo σ di $\mathfrak{U}$. μ_d è un operatore definito sull'insieme $\mathcal{P}({}^*M_\sigma)$ delle parti di ${}^*M_\sigma$.

PROPOSIZIONE. L'operatore μ_d è un operatore di chiusura:

1) $\mu_d(\emptyset) = \emptyset$ e $\mu_d({}^*M_\sigma) = {}^*M_\sigma$.
2) Per ogni $\Omega \subseteq {}^*M_\sigma$, $\Omega \subseteq \mu_d(\Omega)$.
3) $\mu_d(\mu_d(\Omega)) = \mu_d(\Omega)$ (idempotenza).
4) $\mu_d(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mu_d(\Omega_1) \cup \mu_d(\Omega_2)$ (distributività rispetto alle riunioni finite).

Ora, in modo molto generale, se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico l'operatore α definito su $\mathcal{P}(X)$ e che associa a ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ la sua aderenza $\bar{A}$ è un operatore di chiusura. Viceversa si mostra che se α è un operatore di chiusura su $\mathcal{P}(X)$, esso definisce una topologia su X attraverso i chiusi $\alpha(A)$.

L'operatore μ_d definisce dunque una topologia su M_σ per la quale $\Omega \subset M_\sigma$ è chiuso se Ω è la monade di un filtro.

DEFINIZIONE. *Si chiama S-topologia la topologia definita da μ_d.*

Poiché la S-topologia non è caratterizzata che dall'allargamento $\mathfrak{U} \prec {}^*\mathfrak{U}$, la sua analisi permette di studiare anche quest'ultimo. Ecco, per esempio, la caratterizzazione topologica delle entità standard.

PROPOSIZIONE (Luxemburg). Sia $\Omega \subset {}^*M_\sigma$. Ω è standard se e solo se Ω è nello stesso tempo S-aperto e S-chiuso.

Un'altra problematica che emerge naturalmente è la seguente.

Se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico si possono definire le monadi $\mu(x)$ dei punti di X. Viceversa ci si può proporre di dotare X di una struttura «monadica» e di analizzare il rapporto di tale struttura con una struttura topologica.

Tale strategia è pertinente nella misura in cui si constata che nozioni topologiche sofisticate e apparentemente non naturali divengono cosí molto naturali.

A tal proposito si ricordano brevemente alcuni risultati di Puritz [1976].

Sia dato un insieme X e, per ogni $x \in X$, si consideri la «monade» $x \in \mu(x)$ che rappresenta a priori i punti di $^*X$ «infinitamente vicini» a $x \in X$. Tale struttura è detta quasi monadica e viene indicata con φ. Sotto quali condizioni assiomatiche una data struttura φ è equivalente a quella di una topologia?

PROPOSIZIONE. Sia φ una struttura quasi monadica su X. Sono equivalenti le condizioni:

1) φ soddisfa l'assioma φ_2: per ogni $x \in X$, $\mu(x)$ è la monade di un filtro, e φ è equivalente a una pretopologia $\mathcal{T}$ su X. Si dirà allora che φ è monadico.
2) φ soddisfa inoltre l'assioma φ_3: per ogni $y \in {}^*X$, $y \in \mu(x)$ implica $^*\mu(y) \subseteq \subseteq \mu(x)$, e la pretopologia $\mathcal{T}$ è una topologia.
3) φ soddisfa inoltre l'assioma φ_4: per ogni $y \in {}^*X$, $y \notin \mu(x)$ implica $^*\mu(y) \cap \cap \mu(x) = \emptyset$ e la topologia $\mathcal{T}$ è regolare.
4) φ soddisfa inoltre l'assioma φ_5: per ogni $y, z \in {}^*X$, $^*\mu(y) \cap {}^*\mu(z) = \emptyset$ implica che esiste un $u \in {}^*X$ tale che $y \in {}^*\mu(u)$ e $z \in {}^*\mu(u)$, e la topologia $\mathcal{T}$ è normale.

Osservazione (definizioni): 1) si dice che una topologia $(X, \mathcal{T})$ è regolare se, per ogni $x \in X$, gli intorni chiusi di x generano il filtro degli intorni $\mathcal{F}_x$; 2) si dice che una topologia $(X, \mathcal{T})$ è normale se la proprietà di separazione è valevole non soltanto per i punti ma per i chiusi in generale: se A e B sono dei chiusi disgiunti di X si può «separarli» con degli aperti $U \supset A$ e $V \supset B$ disgiunti.

Osservazione (sul simbolo $^*\mu$): $^*\mu$ è una estensione di μ che non si può supporre acquisita a priori poiché le $\mu(x)$ non sono standard. Essa viene definita nel modo seguente. Sia $\mathcal{F}$ un filtro su X. È naturale dire che $\mathcal{F}$ converge verso $x \in X$ se $\mu(\mathcal{F}) \subseteq \mu(x)$. Sia allora $x \in X$ e sia $\mathcal{D}_x$ l'insieme degli ultrafiltri convergenti verso x. Poiché $\mathcal{D}_x$ è una entità standard, si applica a $^*X$. Sia allora $\mathcal{G}$ un $*$-filtro. La sua parte standard $^0\mathcal{G}$, insieme degli $U \subseteq X$ tali che $^*U \in \mathcal{G}$, è un filtro su X. Se $y \in {}^*X$ allora si pone $^*\mu(y) = \bigcup_{\mathcal{G} \in {}^*\mathcal{D}_y} \mu({}^0\mathcal{G})$. Poiché la costruzione delle monadi è stabile per riunione, $^*\mu(y)$ è sempre una monade di un filtro. Ma è possibile avere per x standard $\mu(x) \neq {}^*\mu(x)$.

L'interesse di tale approccio è che è possibile indebolire naturalmente la nozione di struttura monadica in quella di struttura quasi monadica che soddisfa l'assioma (piú debole di φ_2) φ_1: per ogni x, $\mu(x)$ è una quasi monade.

DEFINIZIONE. *Sia $x \in {}^*X$, la monade discreta $\mu_d(x)$ è la monade dell'ultrafiltro $\mathcal{U}_x = \{U \subseteq X \mid x \in {}^*U\}$. Si indichi con $\equiv$ l'equivalenza definita su $^*X$ da $x \equiv y$ se e solo se $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$ (e dunque $\mu_d(x) = \mu_d(y)$). Un sottoinsieme $\Omega \subseteq {}^*X$ è detto saturato o quasi monadico se è saturato per l'equivalenza $\equiv$: per tutti gli $x, y \in {}^*X$, $x \in \Omega$ e $x \equiv y$ implica $y \in \Omega$.*

Sia φ una struttura quasi monadica su X. Si indichi con $\tau_\varphi(x)$ (rispettivamente $\rho_\varphi(x)$) l'insieme dei filtri di X (rispettivamente degli ultrafiltri) convergenti verso x. Si definisce il filtro $\mathcal{N}_x$ degli «intorni» di x come l'intersezione dei filtri di $\tau_\varphi(x)$ (e di $\rho_\varphi(x)$). Sia $\mathcal{U}$ l'insieme degli insiemi di ultrafiltri su X. φ definisce un'applicazione $\rho_\varphi : x \mapsto \rho_\varphi(x)$ di X in $\mathcal{U}$.

PROPOSIZIONE. L'applicazione $\rho_\varphi : X \to \mathcal{U}$ soddisfa le proprietà: P_0) per ogni $x \in X$ l'ultrafiltro principale $\mathcal{F}_x = \{U \subseteq X \mid x \in U\}$ appartiene a $\rho_\varphi(x)$; P_1) un filtro $\mathcal{F}$ su X converge verso x se e solo se l'insieme $\mathcal{U}_\mathcal{F}$ degli ultrafiltri che raffinano $\mathcal{F}$ è incluso in $\rho_\varphi(x)$.

Le strutture di convergenza su X definite da un'applicazione $\rho : X \to \mathcal{U}$ che soddisfa gli assiomi P_0) e P_1), sono state introdotte (nel quadro della topologia generale standard) da Choquet col nome di pseudotopologie. Si tratta in tal caso di una nozione sofisticata che diviene molto naturale nella sua formulazione n. s.

COROLLARIO. Se φ è una struttura quasi monadica, ρ_φ è una pseudotopologia.

È possibile mostrare anche il risultato piú forte:

TEOREMA (Puritz). *La corrispondenza $\rho : \varphi \to \rho_\varphi$ è una biiezione tra le strutture quasi monadiche su X e le pseudotopologie su X.*

3.5. Continuità e continuità uniforme.

È esemplare anche come le nozioni di base di continuità e di continuità uniforme si riformulino nell'analisi n. s.

Continuità. Sia data una funzione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici. La definizione di Cauchy della continuità può cosí essere generalizzata.

DEFINIZIONE. *f è detta continua in $x \in X$ se, per ogni intorno aperto V di $f(x)$, esiste un intorno aperto U di x tale che $f(U) \subseteq V$. f è dunque continua su tutto X se l'immagine inversa di ogni aperto di Y è un aperto in X.*

TEOREMA (caratterizzazione n. s. della continuità). *Un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici è continua in $x \in X$ se e solo se $^*f(\mu(x)) \subset \mu(f(x))$. f è dunque continua su X se rispetta la «fibrazione» operata dalle monadi.*

Dimostrazione: Si supponga che f sia continua in x. Per ogni intorno aperto V di $f(x)$ esiste un intorno aperto U di x tale che $f(U) \subseteq V$. Dunque $^*f(\mu(x)) \subseteq {}^*f(^*U) \subseteq {}^*V$ e $^*f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x)) = \bigcap_{V \in \mathcal{F}_{f(x)}} {}^*V$.

Viceversa si supponga $^*f(\mu(x)) \subset \mu(f(x))$. Per il lemma fondamentale di p. 502 esiste un $*$-aperto U di $^*X$ tale che $x \in U \subset \mu(x)$. $^*f(U) \subset \mu(f(x))$ poiché $^*f(\mu(x)) \subset \mu(f(x))$ e dunque $^*f(U) \subset {}^*V$ per ogni intorno aperto V di $f(x)$.

L'enunciato $\exists U(x \in U) \forall V (f(x) \in V)(f(U) \subseteq V)$ è dunque un enunciato del primo ordine definito in X e valido in $^*X$. Di conseguenza esso è valido in X.

Questa caratterizzazione n. s. della continuità consente per esempio di banalizzare il risultato classico per cui l'immagine di un compatto in una applicazione continua è compatta.

PROPOSIZIONE. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e sia K un compatto di X. L'immagine $f(K)$ di K è compatta in Y.

Dimostrazione: È sufficiente mostrare che se z è un punto di $^*f(K)$ esiste un punto y di $f(K)$ tale che $z \in \mu(y)$. Ma se $z \in {}^*f(K)$, esiste un $x \in {}^*K$ tale che $z = {}^*f(x)$. Siccome K è compatto per ipotesi, esiste un $u \in K$ tale che $x \in \mu(u)$. Poiché f è continua, $^*f(\mu(u)) \subseteq \mu(f(u))$ e dunque $^*f(x) = z \in \mu(f(u))$.

Continuità uniforme. Si consideri il caso in cui X e Y siano spazi metrici, con distanza rispettiva $\xi(x, y)$ e $\zeta(x, y)$. L'usuale definizione di continuità suona cosí: $f : X \to Y$ è continua se l'enunciato

(1) $\quad \forall x,y \in X \ \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 (\xi(x,y) < \eta \Rightarrow \zeta(f(x), f(y)) < \varepsilon)$

è valido. Dunque l'η di cui la (1) afferma l'esistenza dipende da x. Quando esiste una η che non è dipendente da x cioè quando f soddisfa l'enunciato

(2) $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x,y \in X (\xi(x,y) < \eta \Rightarrow \zeta(f(x), f(y)) < \varepsilon)$

si dice che la continuità di f è uniforme. Questa nozione piú restrittiva di continuità è facilmente interpretabile in termini n. s.

TEOREMA (caratterizzazione n. s. della continuità uniforme). *$f : X \to Y$ è uniformemente continua se e solo se per tutti gli $x,y \in {}^*X$ (e non soltanto per tutti gli $x,y \in X$) $x \simeq y$ implica $^*f(x) \simeq {}^*f(y)$.*

Dimostrazione: Si supponga f uniformemente continua e siano $x,y \in {}^*X$ tali che $x \simeq y$. Essendo l'enunciato (2) valido in X, esso è valido in $^*X$ limitando la quantificazione su ε e η agli elementi interni – e dunque standard – di $^*\mathbf{R}$. Siccome $\xi(x,y) < \eta$ per ogni $\eta > 0$ poiché $x \simeq y$, $\zeta({}^*f(x), {}^*f(y)) < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ e dunque $^*f(x) \simeq {}^*f(y)$.

Reciprocamente si supponga che, per tutti gli $x, y \in {}^*X$, $x \simeq y$ implichi $^*f(x) \simeq {}^*f(y)$. Sia $\varepsilon > 0$. L'enunciato

$$\exists \eta > 0 \ \forall x,y \in X (\xi(x,y) < \eta \Rightarrow \zeta(f(x), f(y)) < \varepsilon),$$

è valido in $^*X$. Essendo definito in X, è valido in X.

Questa caratterizzazione n. s. della continuità uniforme consente di banalizzare il risultato classico per cui una funzione continua su uno spazio compatto è uniformemente continua.

PROPOSIZIONE. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Se X è compatto, f è uniformemente continua.

Dimostrazione: Siano infatti $x,y \in {}^*X$ tali che $x \simeq y$. Siccome X è compatto, esiste per il teorema di p. 503 un elemento standard $z \in X$ tale che $x \simeq y \simeq z$. Siccome f è continua, per i teoremi della caratterizzazione n. s. della continuità $^*f(x) \simeq {}^*f(y) \simeq {}^*f(z)$ e f è uniformemente continua.

Un errore di Cauchy. Sia ora $F = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di funzioni $f_n : X \to Y$ tra spazi metrici (di distanze ξ e ζ). Si dice che la successione F converge verso f se, per ogni $x \in X$, la successione $F(x) = \{f_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ di punti di X converge verso $f(x)$, cioè se F soddisfa l'enunciato:

(3) $\quad \forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ (n > N \Rightarrow \zeta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$.

L'intero N, di cui la (3) afferma l'esistenza, dipende in generale da x. Quando esiste un N che non dipende da x, cioè quando F soddisfa l'enunciato:

(4) $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall x \in X (n > N \Rightarrow \zeta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$

si dice che F converge uniformemente verso f.

Un celebre errore di Cauchy consistette nell'aver creduto di dimostrare che una successione convergente di funzioni continue convergesse a una funzione continua. L'analisi dei controesempi condusse alla restrizione della convergenza alla convergenza uniforme.

La riformulazione n. s. permette di vederne chiaramente il perché.

Dapprima si caratterizza (cfr. il teorema di p. 508) la convergenza uniforme.

PROPOSIZIONE. Una successione $F = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente verso f se e solo se per ogni $y \in {}^*X$ e per ogni $\omega \in {}^*\mathbf{N}_\infty$, $^*f(y) \simeq f_\omega(y)$.

Osservazione: La successione $F = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge verso f se e solo se per ogni $x \in X$, $f_\omega(x) \simeq f(x)$ (cfr. sopra, p. 498).

TEOREMA. *Se la successione di funzioni continue $F = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente verso f, f è continua.*

Dimostrazione: Si deve mostrare che se $x \in X$ e $y \in {}^*X$, $y \simeq x$ implica $^*f(y) \simeq f(x)$. Sia dunque $y \in {}^*X$ tale che $y \simeq x$. Siccome f_ω è continua, $^*f_\omega(y) \simeq f_\omega(x)$. Siccome F converge a f, $f_\omega(x) \simeq f(x)$. Siccome F converge uniformemente a f, $^*f(y) \simeq {}^*f_\omega(y)$ per la proposizione appena riportata. Dunque $^*f(y) \simeq {}^*f_\omega(y) \simeq f_\omega(x) \simeq f(x)$. Se F non converge uniformemente, non si ha necessariamente $^*f(y) \simeq {}^*f_\omega(y)$ e non si può dunque concludere.

3.6. Localizzazione.

Se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico, la monade $\mu(x)$ di un punto $x \in X$ è un sottoinsieme (in generale esterno) di $^*X$ che svolge il ruolo di intorno infinitesimale di x. Essa «cattura» per costruzione le proprietà locali di X in x. Ciò permette di ridurre considerevolmente la complessità della nozione di «locale» che rappresenta uno dei punti cruciali della matematica moderna. Si consideri per esempio una funzione f definita su X. «Localizzare» f in x

vuol dire considerare la sua restrizione a un intorno «infinitesimale» di x in X. Siccome tale nozione è inconsistente in analisi standard, si è stati condotti a definire la «localizzazione» di f in x – che viene chiamata germe di f in x – con modalità molto sofisticate. Sia $\mathfrak{F}$ uno spazio di funzioni su X. Si definisce prima una relazione d'equivalenza (dipendente da x e da $\mathfrak{T}$) su $\mathfrak{F}$: $f,g \in \mathfrak{F}$ sono equivalenti ($f \sim g$) se esiste un intorno aperto U di x sul quale le restrizioni $f|U$ e $g|U$ di f e g coincidono. Si definisce poi il germe di f in x come la classe d'equivalenza di f.

Ma se si considera un allargamento $^*X$ di X, è naturale definire il germe di f in x come la funzione n. s. $^*f|\mu(x)$. Definiti in tal modo, i germi diventano funzioni nel senso classico del termine, cioè di dominio ben determinato. È facile verificare che esiste una biiezione tra gli insiemi di germi standard e n. s.

Ciò ha permesso, per esempio a Robinson [1969*a*], di dare una dimostrazione n. s. molto economica del teorema della teoria dei germi di funzioni analitiche che generalizza il *Nullstellensatz* di Hilbert (cfr. p. 480).

Una forma del *Nullstellensatz* afferma che per K corpo algebricamente chiuso, se $V_{\mathfrak{J}}$ è la varietà di K^n definita da un ideale $\mathfrak{J} = (f_1, ..., f_p)$ dell'anello di polinomi $K[x_1, ..., x_n]$ e se V_ψ è la varietà di K^n definita dal polinomio $\psi \in K[x_1, ..., x_n]$, l'inclusione di varietà $V_{\mathfrak{J}} \subset V_\psi$ implica che una potenza intera ψ^k di ψ appartenga a $\mathfrak{J}$.

Si consideri l'anello $\mathcal{G}$ dei germi all'origine delle funzioni analitiche $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$. Se φ è un germe di $\mathcal{G}$ (o una famiglia o un ideale) si definisce la sua varietà V_φ come il germe all'origine dell'insieme $f^{-1}(f(0))$ in cui f è un rappresentante qualunque di φ (che, come si è detto, è una classe di equivalenza).

Il teorema che Robinson *ri*-dimostra è il seguente:

TEOREMA (*Nullstellensatz* di Rückert). *Siano $\varphi_1, ..., \varphi_p, \psi$ dei germi di $\mathcal{G}$. Sia $\mathfrak{J}$ l'ideale di $\mathcal{G}$ generato da φ_i per $i = 1, ..., p$. L'inclusione di varietà $V_{\mathfrak{J}} \subset V_\psi$ implica che una potenza intera ψ^k di ψ appartenga a $\mathfrak{J}$.*

Nella formulazione n. s. i germi φ_i e ψ divengono funzioni n. s. sulla monade $\mu(0)$ di $\mathbf{C}^n$ e le varietà $V_{\mathfrak{J}}$ e V_ψ dei sottoinsiemi di $\mu(0)$.

Robinson mostra allora che è possibile rimodellare la dimostrazione di questo teorema [cfr. Robinson 1969*b*, pp. 140 sg.] su quella classica del *Nullstellensatz*, che è la seguente. Si supponga che $\mathfrak{J}$ escluda tutte le potenze di ψ. Esiste un ideale $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}$ *massimale* rispetto a questa proprietà. Si mostra che $\mathfrak{J}$ è un ideale *primo*. Sia K' l'anello di integrità quoziente di $K[x_1, ..., x_n]$ rispetto a $\mathfrak{J}$. Poiché K' è d'integrità, ammette un corpo di frazioni $\tilde{K}$ che è una estensione di K. Il punto essenziale è che l'immagine $(\xi_1, ..., \xi_n)$ nel corpo $\tilde{K}$ di $(x_1, ..., x_n)$ è un punto generico di $\mathfrak{J}$, nel senso che per ogni $f \in K[x_1, ..., x_n]$, $f \in \mathfrak{J}$ equivale a $f(\xi_1, ..., \xi_n) = 0$. In particolare $f_i(\xi_1, ..., \xi_n) = 0$ per $i = 1, ..., p$. Ma $\psi(\xi_1, ..., \xi_n) \neq 0$. L'inclusione $V_{\mathfrak{J}} \subset V_\psi$ non è dunque valida in $\tilde{K}^n$. Essa è a fortiori non valida nella chiusura algebrica di $\tilde{K}$. La $\mathfrak{M}$-completezza della teoria dei corpi algebricamente chiusi implica che essa non è valida in K.

Per dimostrare nello stesso modo il *Nullstellensatz* di Rückert, occorre interpretare la nozione di punto generico nel caso dei germi generici di funzioni analitiche. Si ha allora il teorema seguente:

TEOREMA (Robinson). *Sia $\mathfrak{J}$ un ideale primo di $\mathcal{G}$. Esiste un punto $(\xi_1, ..., \xi_n)$ della monade $\mu(0)$ di $\mathbf{C}^n$ tale che per ogni germe $\varphi \in \mathcal{G}$, $\varphi \in \mathfrak{J}$ equivale a $\varphi(\xi_1, ..., \xi_n) = 0$.*

3.7. La relativizzazione dell'opposizione finito/infinito.

Già piú volte si è detto che uno dei principali interessi dell'analisi n. s. è stato quello di «riportare» l'infinito al finito. Si daranno ora alcuni esempi di questa «dialettica» cosí chiaramente anticipata da Leibniz. Tutto ciò è di notevole importanza epistemologica. Molti dei profondi risultati dell'analisi moderna consistono nel generalizzare al caso infinito un certo numero di proprietà classiche del caso finito. L'analisi n. s. mostra che in generale esistono casi $*$-finiti che sono «eccellenti approssimazioni» dei casi infiniti: perciò, come diceva Leibniz, «le regole del finito funzionano nell'infinito» e ciò in linea di principio. Lo schema generale di tali chiarimenti concettuali dei casi infiniti è del tipo schematizzato nella figura 10. Si delineano alcuni esempi.

Misura dei numeri reali. Se X è un insieme finito, la misura di un sottoinsieme A di X è evidente: è sufficiente dividere il numero di elementi di A per il numero di elementi di X. Quando X è infinito, come $\mathbf{R}$, il problema è molto piú delicato. Esso conduce alla teoria della misura. Ora se si considera la misura classica dx su $\mathbf{R}$ (misura di Lebesgue), ci si scontra con un certo numero di «paradossi» semantici (e non logici). Per esempio la misura dell'insieme $\mathbf{Q}$ dei razionali è nulla benché $\mathbf{Q}$ sia denso in $\mathbf{R}$. A fortiori la probabilità di trovare un numero reale dato scegliendo un numero reale a caso è nulla laddove spontaneamente (semanticamente) si è portati a pensarla non come nulla ma come infinitesimale.

Appare dunque naturale domandarsi se non sia possibile costruire una misura n. s. ν su $\mathbf{R}$ tale che 1) la misura di un numero sia un infinitesimo fissato; 2) la misura di un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ si ottenga – come nel caso finito – sommando le misure dei suoi elementi; 3) la parte standard di ν sia la misura dx.

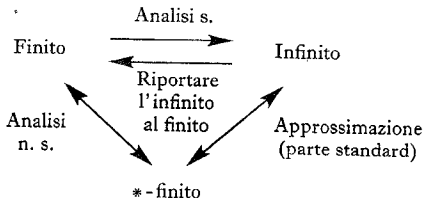


Figura 10.
Le regole del finito funzionano nell'infinito.

Tale questione è stata risolta da Bernstein e Wattenberg [1969]. Qui ci si limita a ricordare che in un allargamento ogni insieme infinito ammette una estensione $*$-finita. L'idea è quella di considerare, in un allargamento $*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$, una estensione $*$-finita $\mathcal{R}$ di $\mathbf{R}$ e di definire la misura ν come nel caso finito. Perché la parte standard di ν sia la misura di Lebesgue, s'imporrà a $\mathcal{R}$ una condizione di ripartizione uniforme.

Teoria di Fourier. Sia T il cerchio dei numeri reali modulo 2π. Una funzione $f : T \to \mathbf{C}$ è una funzione reale a valori complessi periodica di periodo 2π. Tra queste funzioni ne esistono di privilegiate, le funzioni trigonometriche e^{inx} ($n \in \mathbf{Z}$). La teoria di Fourier (analisi armonica) consiste nell'approssimare le funzioni $f : T \to \mathbf{C}$ con una sovrapposizione «di armoniche» e^{inx}. I passaggi sono i seguenti.

Per $n \in \mathbf{Z}$ si definisce il coefficiente di Fourier $\hat{f}(n)$ di rango n di f con l'integrale

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Si ottiene un'applicazione $\hat{f} : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ che si chiama trasformata di Fourier di f.

Si definisce la serie di Fourier $\tilde{f}$ di f come la serie

$$\tilde{f} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Si mostra che nello spazio $\mathcal{F}$ delle funzioni considerate (in realtà, spazio di classi di equivalenza di funzioni uguali «quasi ovunque»), il numero

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f \bar{g}\, dx$$

è un prodotto scalare per cui il sistema delle «armoniche» $h_n = e^{inx}$ è un sistema ortonormato completo. Ciò significa:

1) per ogni $n \in \mathbf{Z}$, h_n ha norma 1: $\langle h_n, h_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{inx} e^{-inx}\, dx = 1$;

2) per $n \neq m$, le h_n sono ortogonali: $\langle h_n, h_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = 0$;

3) ogni funzione $f \in \mathcal{F}$ è una combinazione lineare $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{inx}$ ($a_n \in \mathbf{C}$): $\tilde{f} = f$.

Ciò significa che $\mathcal{F}$ è l'analogo in dimensione infinita di uno spazio «euclideo» (o come si dice, con piú precisione, «hermitiano») $\mathbf{C}^n$ di dimensione finita in cui le h_n costituiscono un sistema di assi «cartesiani». I coefficienti di Fourier $\hat{f}(n)$ sono molto semplicemente le coordinate di f rispetto a tale sistema di riferimento, cioè le «proiezioni ortogonali» di f sui vettori unitari h_n: ($\hat{f}(n) = \langle f, h_n \rangle$) e la serie di Fourier $\tilde{f}$ è l'analogo della scomposizione classica di un vettore in un dato riferimento. $\tilde{f} = f$: se $\hat{f}$ si ottiene a partire da f, reciprocamente f si riottiene a partire da $\hat{f}$ (formula di inversione).

Sullo spazio $\hat{\mathcal{F}}$ delle funzioni $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ si definisce anche un prodotto scalare con $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) \bar{\hat{g}}(n)$. Si dimostra allora la formula di Parseval, che afferma che i prodotti scalari $\langle f, g \rangle$ sono gli analoghi dei prodotti scalari in dimensione finita: $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) \bar{\hat{g}}(n)$.

Questi risultati classici non sono banali, ma lo diventano nel caso finito. Per $p \in \mathbf{N}$, si consideri lo spazio

$$T_p = \left\{ 0, \frac{2\pi}{p}, \ldots, \frac{2\pi(p-1)}{p} \right\}.$$

Sia $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ l'insieme degli interi modulo p. Si traduce allora nel modo seguente il discorso di prima:

$$x \in T \to \frac{2\pi l}{p} \in T_p$$

$$n \in \mathbf{Z} \to k \in \mathbf{Z}_p$$

$$e^{inx} = h_n(x) \to e^{(2i\pi/p)kl} = h_k\left(\frac{2\pi l}{p}\right)$$

$$(f : T \to \mathbf{C}) \to (f : T_p \to \mathbf{C})$$

$$\hat{f}(n) \to \hat{f}(k) = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} f\left(\frac{2\pi l}{p}\right) e^{-(2i\pi/p)kl}$$

$$f(x) \to f\left(\frac{2\pi l}{p}\right) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_p} \hat{f}(k) e^{(2i\pi/p)kl}$$

$$\langle f, g \rangle \to \langle f, g \rangle = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} f\left(\frac{2\pi l}{p}\right) \bar{g}\left(\frac{2\pi l}{p}\right)$$

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \to \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}_p} \hat{f}(k) \bar{\hat{g}}(k)$$

Secondo Luxemburg [1972] è allora possibile ritrovare la teoria standard di Fourier approssimandola con un caso $*$-finito la cui teoria deriva direttamente dal caso (banale) finito. Infatti: se T_p è una «pessima» approssimazione di T, $*T_\omega$ (in cui $*T$ è un allargamento di T e $\omega \in *\mathbf{N}_\infty$ un intero n. s. infinito) è al contrario una «ottima» approssimazione di T. Infatti se ω è «abbastanza grande» – cioè se ogni intero standard divide ω – $*T_\omega$ ammette T come parte standard. Sia $f \in \mathcal{F}$, e si indichi con $*f_\omega$ la restrizione di $*f$ a $*T_\omega$. Se si applica alle $*f_\omega$ la teoria finita e se si prendono le parti standard, si ritrova la teoria classica.

Analisi spettrale. Sia E uno spazio vettoriale di dimensione n, per esempio su $\mathbf{C}$, e sia T un operatore lineare su E, cioè un'applicazione lineare $T : E \to E$.

Se $(e_1, \ldots, e_n)$ è una base di E (cioè un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti) e se $T(e_i)$ è di coordinate t_i^j relativamente a tal base, la matrice $n \times n$ $(t_i^j) = A_T$ caratterizza T. Se infatti $x \in T$ è di coordinate (x^i), $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$, $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i T(e_i)$ poiché T è lineare, $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n} t_i^j e_j$: $T(x)$ è di coordinate $T(x)^j = \sum_{i=1}^{n} x^i t_i^j$.

L'analisi spettrale classica di T (o di A_T) consiste nell'esprimere T come una somma di operatori lineari di omotetia definiti su sottospazi di E. Piú precisamente, si cercano i vettori $x \in E$ tali che esiste un $\lambda \in \mathbf{C}$ che soddisfa l'espressione $T(x) = \lambda x$ (il trasformato di x per T è omotetico di x). Se accade questo si dice che λ è un valore proprio o autovalore di T e che x è un vettore proprio o autovettore di T. Dire che λ è un valore proprio significa che il nucleo dell'operatore $(T - \lambda I)$ (dove I è l'operatore identico su E) non è ridotto a (o) o ancora che $T - \lambda I$ non è invertibile (cioè non è un automorfismo lineare di E). Per ciò è necessario e sufficiente che il determinante $D(\lambda)$ della matrice, $n \times n$, $A_T - \lambda I$ (dove I è la matrice unità) sia nullo.

$D(\lambda) = 0$, equazione di grado n in λ a coefficienti complessi, è detta equazione caratteristica di T. Poiché $\mathbf{C}$ è algebricamente chiuso, essa ammette n radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distinte o coincidenti. Nel caso generico le λ_i sono distinte: a ogni λ_i corrisponde allora, salvo omotetie, un solo vettore proprio: esiste una «retta» E_i di E sulla quale T si riduce all'omotetia λ_i. Se $T_i = T|E_i$, allora T è la «somma» dei T_i.

Nel caso in cui essa ammetta radici coincidenti (caso non generico) si mostra (teorema di Jordan) che la decomposizione spettrale di T ha ancora un senso. Si chiama spettro di T l'insieme delle λ_i.

Osservazione: Si suppongano le λ_i distinte e si prenda per base di E la base – dipendente da T – composta di vettori propri h_i corrispondenti ai valori propri λ_i. Con questa base, la matrice A_T di T diventa diagonale:

$$A_T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

L'analisi spettrale è dunque la ricerca di una base (vettori propri) «adattata» a T nella quale A_T diventi la piú semplice possibile.

Lo sviluppo dell'accoppiamento fra algebra e analisi, ma soprattutto quello della meccanica quantistica, conduce a generalizzare l'analisi spettrale a operatori definiti su spazi vettoriali di dimensione infinita (numerabile). Tra questi spazi si sono privilegiati quelli che generalizzano la struttura dei $\mathbf{C}^n$ (cioè che soddisfano le proprietà elencate sopra alle pp. 512-13): sono i cosiddetti spazi di Hilbert. Sono spazi H di dimensione infinita su $\mathbf{C}$, dotati di un prodotto scalare $\langle f, g \rangle$ (e dunque di una norma $\|f\| = \langle f, f \rangle$ e di una metrica $d(f, g) = \|f - g\|$) topologicamente completi rispetto alla metrica e che possiedono una base completa di vettori unitari ortogonali (cfr. del resto l'articolo «Calcolo» nel vol. II, pp. 444-45, di questa stessa *Enciclopedia*). Essi sono stati

introdotti da Hilbert per risolvere (tra l'altro) un problema di esistenza di minimo che era stato utilizzato implicitamente e senza dimostrazione da Riemann: dati uno spazio metrico E di dimensione infinita, un elemento f di E e un sottospazio lineare F di E, esiste un elemento g di F la cui distanza da f sia minima, o ancora la distanza d di f da F, $d = \min_{g \in F} d(f, g)$ è raggiunta effettivamente da un elemento g di F? Se E è uno spazio di Hilbert l'esistenza di g è immediata: è sufficiente prendere per g il «piede della perpendicolare» abbassata da f su F (teorema della proiezione ortogonale).

Si è dunque giunti a estendere l'analisi spettrale dalla dimensione finita agli operatori in spazi di Hilbert. Appaiono a questo punto parecchie complicazioni. Per esempio:

a) I sottospazi lineari di H non sono necessariamente chiusi e un operatore lineare non è necessariamente continuo.
b) Occorre distinguere tra i valori propri λ di T tali che esiste un $x \in H$ che soddisfa $T(x) = \lambda x$ e gli elementi dello spettro di T, insieme dei λ tali che $T - \lambda I$ non è invertibile. Che $T - \lambda I$ non sia invertibile infatti non implica piú necessariamente che il nucleo di $T - \lambda I$ contenga un vettore non nullo.
c) Lo spettro di T può possedere parti continue.

Seguendo Robinson [1966, cap. VII] si indicherà come la relativizzazione dell'opposizione finito/infinito in analisi n. s. permette di «riportare al finito» l'analisi spettrale di operatori lineari «non troppo patologici», cioè compatti e autoaggiunti. Si consideri, preliminarmente, un allargamento $^*H$ di H. Sia T un operatore lineare. Si considerino i numeri N (eventualmente infiniti in senso standard) che soddisfano $\|T(x)\| \leq N\|x\|$ per ogni $x \in H$. L'estremo inferiore degli N si chiama norma di T, indicata con $\|T\|$. Essa può essere infinita (in senso standard).

DEFINIZIONE. *Si dice che T è limitato se $\|T\|$ è finita.*

Se T è limitato, T è continuo.

PROPOSIZIONE. T è limitato se e solo se $^*T$ trasforma ogni punto finito di $^*H$ in un punto finito, cioè se l'insieme $^*H_f$ dei punti finiti di $^*H$ è stabile per $^*T$.

Dimostrazione (Robinson): Se T è limitato, allora $\|^*T(x)\| \leq \|T\| \, \|x\|$ è valido per ogni x di $^*H$. Se $\|x\|$ è finita, $\|^*T(x)\|$ è finita. Viceversa si supponga che $^*H_f$ sia stabile per $^*T$ e che T non sia limitato. Esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di punti di H di norma finita (per esempio 1) tale che la successione $(T(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ non è limitata. Come si è visto a p. 498, esiste un intero n. s. infinito $\omega \in {}^*\mathbf{N}_\infty$ tale che $\|^*T(x_\omega)\|$ sia infinita: $^*T(x_\omega) \notin {}^*H_f$. Ora siccome $\|x_\omega\| = 1$, $x_\omega \in {}^*H_f$ e dunque $^*T(x_\omega) \in {}^*H_f$. Contraddizione. T è limitato.

Sussiste anche la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE. T è limitato se e solo se la monade $\mu(0)$ degli infinitesimi di $^*H$ è $^*T$-stabile.

DEFINIZIONE. *Si dice che T è compatto o completamente continuo se, per ogni sottoinsieme limitato B di H, $\overline{T(B)}$ è compatto.*

Si può allora dimostrare quest'altra proposizione:

PROPOSIZIONE. T è compatto se e solo se trasforma i punti finiti di $^*H$ in punti quasi standard (cioè se trasforma $^*H_f$ in $^*H_{q.s.}$).

COROLLARIO. Se T è compatto, è limitato.

DEFINIZIONE. *Si dice che T è autoaggiunto se, per tutti gli $x, y \in H$, $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$. Ciò implica che $\langle x, T(x)\rangle = \langle \overline{T(x), x}\rangle$ è reale.*

Si consideri dunque un operatore compatto e autoaggiunto T. Per analizzare T si considererà essenzialmente un'approssimazione $*$-finita di H e ad essa si restringerà $^*T$; si applicherà poi a tale restrizione l'analisi spettrale classica (caso finito) per ritornare infine a T. I passaggi – nei tratti essenziali – sono i seguenti. Sia $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una base ortonormale di H. $(e_n)_{n\in{}^*\mathbf{N}}$ è una base ortonormale di $^*H$. Sia $\omega \in {}^*\mathbf{N}_\infty$ un intero infinito fissato e H_ω il sottospazio di $^*H$ di base $(e_1, \ldots, e_\omega)$. H_ω è di dimensione $*$-finita. È dunque possibile trasferirvi la teoria classica.

Sia $P_\omega : {}^*H \to H_\omega$ il proiettore di $^*H$ sul suo sottospazio H_ω che associa al punto $x = \sum_{n\in{}^*\mathbf{N}} x_n e_n$ di $^*H$, il punto $x = \sum_{n=1}^{\omega} x_n e_n$ di H_ω. P_ω è interno e di norma 1. Sia $T_\omega = P_\omega {}^*T P_\omega$ il trasformato di $^*T$ mediante P_ω. $\|T_\omega\| \leq \|T\|$ poiché $\|P_\omega\| = 1$. T_ω è autoaggiunto poiché T e P_ω lo sono. Esso è un operatore interno su $^*H$.

PROPOSIZIONE. T_ω è compatto (cioè trasforma $^*H_f$ in $^*H_{q.s.}$).

Poiché T_ω invia H_ω in H_ω, è possibile considerare la sua restrizione T' a H_ω. T' è un'approssimazione di T definita su uno spazio $*$-finito. Trasferendo al caso n. s. la teoria classica degli operatori autoaggiunti, si può concludere che esistono dei valori propri $\lambda_1, \ldots, \lambda_\omega$ distinti o coincidenti (che si possono supporre di valore assoluto crescente) e dei vettori propri $v_1, \ldots, v_\omega$ (che si possono supporre di norma 1) che soddisfano la $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ cioè

$$\begin{cases} \langle v_i, v_i\rangle = \|v_i\| = 1 & i = 1, \ldots, \omega \\ \langle v_i, v_j\rangle = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Ciò significa che i (v_i) costituiscono una base ortonormata di H_ω diagonalizzante T' (questo è possibile per il fatto che T' è autoaggiunto, cioè «simmetrico»).

$T'v_i = \lambda_i v_i$ implica $|\lambda_i| \leq \|T'\| \leq \|T\|$ e siccome T è compatto e dunque limitato, i valori propri λ_i sono *finiti*.

Robinson [1966] dimostra allora i due seguenti risultati elementari.

PROPOSIZIONE. Se $\lambda_i \notin \mu$ (dove μ è la monade degli infinitesimi di $\mathbf{R}$), il vettore proprio v_i è quasi standard.

PROPOSIZIONE. Se $\lambda_i \notin \mu$, la dimensione dell'autospazio H_i per λ_i (H_i è il sottospazio generato dai vettori propri v_j corrispondenti a λ_i) è finita.

Lo spettro di T' si scompone dunque in due parti, una parte infinitesimale e una parte non-infinitesimale che corrisponde alla situazione classica. Se si ordinano i valori propri λ_i in una successione strettamente crescente (senza ripetizioni) $\nu_1, \ldots, \nu_\delta$ ($\delta \leq \omega$) di valori propri distinti e quindi i rispettivi autospazi $H'_1, \ldots, H'_\delta$ e i rispettivi proiettori $P'_1, \ldots, P'_\delta : H_\omega \to H'_1, \ldots, H'_\delta$, si ha per trasferimento del teorema classico di decomposizione spettrale:

$$a)\ H_\omega = \bigoplus_{l=1}^{l=\delta} H'_l$$

$$b)\quad I = \sum_{l=1}^{l=\delta} P'_l$$

$$c)\ T' = \sum_{l=1}^{l=\delta} \nu_l P'_l$$

Occorre ora «ritornare» da T' (definito su H_ω approssimazioni di H) a T (definito su H). Sia $x = \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n e_n$ un punto di H. La successione $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si prolunga a una successione $(x_n)_{n\in{}^*\mathbf{N}}$ che definisce un punto $^*x = \sum_{n\in{}^*\mathbf{N}} x_n e_n$ di $^*H$. La proiezione $P_\omega(^*x) = \sum_{n=1}^{\omega} x_n e_n$ appartiene a H_ω e alla monade $\mu(x)$ di x. Poiché T_ω è «compatto», $T'(P_\omega(^*x))$ è q. s. Sia $^0T'$ la sua parte standard. In tal modo si definisce un operatore su H.

TEOREMA. $^0T' = T$.

Dimostrazione: Si deve mostrare $^0(T'P_\omega(^*x)) = T(x)$. Ma $T'P_\omega(^*x) = P_\omega {}^*TP_\omega(^*x)$ e $P_\omega(^*x) \simeq x$. Dunque $^*TP_\omega(^*x) \simeq {}^*T(x) = T(x)$ e $P_\omega {}^*TP_\omega(^*x) \simeq P_\omega T(x) = T(x)$.

È quindi lecito «ritornare» da T' a T prendendo le parti standard. Se λ_i è un valore proprio non infinitesimale, $^0\lambda_i$ (che esiste poiché λ_i è finito) è valore proprio di T e ^0v_i (che esiste poiché v_i è q. s.) è vettore proprio di T di valore proprio $^0\lambda_i$. Se $\nu_1, \ldots, \nu_\delta$ sono i valori propri senza ripetizione, se W è l'insieme degli indici $1, \ldots, \delta$ che corrispondono ai valori propri non infinitesimali, $^0H'_l$ la parte standard di H'_l, H_0 l'ortogonale in H della somma $\bigoplus_{l\in W} {}^0H'_l$, e P_0 (rispettivamente P_l) il proiettore di H su H_0 (rispettivamente $^0H'_l$), si ottiene la decomposizione spettrale.

TEOREMA (Robinson). 1) $H = H_0 \bigoplus_{l\in W} {}^0H'_l$

2) $I = P_0 + \sum_{l\in W} P_l$

3) $T = \sum_{l\in W} {}^0\nu_l P_l$

Si conclude questa riconsiderazione della teoria degli operatori, accennando alla risoluzione che Robinson ha dato del problema di Halmos e Smith.

TEOREMA (Robinson). *Sia T un operatore limitato su H tale che un polinomio in T sia compatto. Allora T lascia invariante almeno un sottospazio lineare chiuso di H non banale (cioè differente da* (0) *e da H).*

Tale teorema è un esempio importante di dimostrazione di una congettura con metodi n. s. [cfr. Robinson 1966, pp. 195-200].

Teoria di Galois. Sia K un corpo e L un'estensione algebrica, separabile e normale (cioè di Galois) di K. Ciò significa 1) che tutti gli elementi di L sono algebrici su K cioè sono soluzioni di equazioni a coefficienti in K, 2) che se un polinomio irriducibile (cioè non scomponibile in modo non banale nel prodotto di due polinomi) $P \in K[x]$ ha una radice in L, esso si scompone su L in prodotto di fattori del primo grado. Se il grado di L su K (cioè la sua dimensione come spazio vettoriale su K) è finito, il teorema centrale della teoria di Galois afferma:

TEOREMA DI GALOIS. *Il gruppo $G(L/K)$ degli automorfismi del corpo L, che lasciano invariati gli elementi di K, classifica le estensioni intermedie $K \subset F \subset L$: c'è una corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi normali di $G(L/K)$ e i corpi intermedi F. Ad F si associa il sottogruppo degli elementi $\vartheta \in G(L/K)$ che lasciano invariati gli elementi di F e a un sottogruppo H di $G(L/K)$ si associa il corpo degli invarianti comuni a tutti i $\vartheta \in H$. Ad L corrisponde il sottogruppo banale* $\{1\}$ *e a K l'intero gruppo $G(L/K)$.*

Tale teorema non vale piú quando il grado di L su K è infinito (e perciò in particolare per l'estensione $\mathbf{Q} \subset \bar{\mathbf{Q}}$ ove $\bar{\mathbf{Q}}$ è la chiusura algebrica dei razionali). Affinché esso valga ancora, occorre limitarsi ai sottogruppi di $G = G(L/K)$ chiusi rispetto a una topologia definita intrinsecamente, detta topologia di Krull. Questa topologia è definita prendendo come sistema fondamentale di intorni dell'elemento neutro 1 l'insieme dei sottogruppi di G di indice finito. Poiché la topologia è compatibile con la struttura di gruppo, tale sistema definisce, per traslazione, un sistema fondamentale di intorni per ogni elemento di G.

La topologia di Krull può essere ottenuta in modo n. s. trasferendo la teoria finita a un'approssimazione $*$-finita della teoria infinita.

Si supponga che l'estensione galoisiana $K \subset L$ sia di grado infinito. La relazione binaria $R(x, y)$ dove x e y sono estensioni intermedie «$K \subset x \subset y \subset L$ e x e y sono finiti e normali» è concorrente. Essa ammette quindi in un allargamento $^*K$ di K una «soluzione globale» $^*K \subset \Phi \subset {}^*L$.

Per costruzione, $^*F \subset \Phi$ per ogni estensione finita normale $K \subset F \subset L$. Siccome $\bigcup F = L$, e $F \subset {}^*F$, $L \subset \Phi$. Φ è perciò una estensione $*$-finita di $^*K$ che è una estensione di L. Per trasferimento è possibile applicare il teorema di Galois a $^*K \subset \Phi$ a condizione di restringersi alle entità interne.

Sia $^*G_\Phi = G(\Phi/{}^*K)$ il gruppo di Galois dei $^*K$-automorfismi interni di Φ.

I sottogruppi normali interni di $^*G$ classificano i sottocorpi interni di Φ che sono delle estensioni di $^*K$.

Sia $\vartheta \in {}^*G_\Phi$. ϑ è la restrizione a Φ di un elemento di $^*G$. Siccome L è unione di estensioni normali finite, $\vartheta L = L$. Si pone ${}^0\vartheta = \vartheta | L$. ${}^0\vartheta \in G$. Si definisce cosí un morfismo $^*G_\Phi \to G$ il cui nucleo è l'insieme delle $\vartheta \in {}^*G_\Phi$ che lasciano L invariante. Sia F un'estensione intermedia $K \subset F \subset L$. $^*F \cap \Phi$ è un'estensione (interna) intermedia $^*K \subset {}^*F \cap \Phi \subset \Phi$. Sia $^*G_F$ il sottogruppo (interno) di $^*G_\Phi$ corrispondente a $^*F \cap \Phi$ per il teorema di Galois e sia ${}^0G_F = \{{}^0\vartheta\}_{\vartheta \in {}^*G_F}$. ${}^0G_F$ è un sottogruppo normale di G.

Si definisce cosí un'applicazione $\gamma : F \to {}^0G_F$ tra le estensioni intermedie F e i sottogruppi di G. Si tratta ora di caratterizzare l'immagine di γ.

Sia $\vartheta \in {}^*G$. Sia $\vartheta | L = {}^0\vartheta$ (questa notazione è compatibile con la notazione precedente). Se $S \subset {}^*G$, sia ${}^0S = \{{}^0\vartheta\}_{\vartheta \in S}$. Sussiste allora il teorema seguente:

TEOREMA (Robinson). *Un sottogruppo normale H di G è nell'immagine di γ se e solo se ${}^0({}^*H) = H$.*

Questo teorema, che caratterizza i sottogruppi di G che classificano le estensioni intermedie $K \subset F \subset L$, permette di ritrovare la topologia di Krull per la quale essi sono chiusi. [J. P.].

Alembert, J.-B. Le Rond d'

1754 «Différentiel», in *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres. Mis en ordre et publié par M. Diderot... et quant à la Partie Mathématique, par M. d'Alembert...*, Briasson, David, Le Breton, Durand, Paris 1751-65, vol. IV, pp. 985-89.

1765 «Limite (Mathémat.)», *ibid.*, vol. IX, p. 542.

Badiou, A.

1969 *La subversion infinitésimale*, in «Cahiers pour l'analyse», n. 9, pp. 118-37.

Bell, J. L., e Slomson, A. B.

1969 *Models and Ultraproducts. An Introduction*, North-Holland, Amsterdam.

Berkeley, G.

1734 *The Analyst; or, a Discourse addressed to an Infidel Mathematician*, Tonson, London (trad. it. Fondazione Giorgio Ronchi, Firenze 1971).

Bernstein, A. R., e Wattenberg, F.

1969 *Non-standard measure theory*, in W. A. J. Luxemburg (a cura di), *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Rinehart and Winston, New York, pp. 171-85.

Cantor, G.

1883 *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, in «Mathematische Annalen», XXI, pp. 545-91.

Cauchy, A.-L.

1821 *Cours d'Analyse*, Imprimerie Royale, Paris; ora in *Œuvres complètes*, serie II, tomo III, Gauthier-Villars, Paris 1897.

Fenstadt, J. E.

[1968] *Non-standard Models for Arithmetics and Analysis*, in *Proceedings of the 15th Scandinavian Congress (Oslo)*, Springer, Berlin 1970, pp. 30-47.

Fraenkel, A. A.

1928 *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer, Berlin 1928³.

Gödel, K.
1930 *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, in «Monatshefte für Mathematik und Physik», XXXVII, pp. 349-60.
1931 *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme*, in «Monatshefte für Mathematik und Physik», XXXVIII, pp. 173-98 (trad. it. in E. Agazzi, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Milano 1961).

Henkin, L.
1949 *The completeness of the first order functional calculus*, in «Journal of Symbolic Logic», XIV, pp. 159-66.
1950 *Completeness in the theory of types*, in «Journal of Symbolic Logic», XV, pp. 81-91.

Keisler, H. J.
1962 *Ultraproducts and elementary classes*, in «Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings», serie A, n. 64, pp. 477-95.
1965 *A survey of ultraproducts*, in Y. Bar-Hillel (a cura di), *Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the 1964 International Congress*, North-Holland, Amsterdam, pp. 112-26.

Kreisel, G.
1967 *Informal Rigour and Completeness Proofs*, in I. Lakatos (a cura di), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, pp. 138-86.
1969 *Axiomatizations of Non-standard Analysis that are Conservative Extensions of Formal Systems for Classical Standard Analysis*, in W. A. J. Luxemburg (a cura di), *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Rinehart and Winston, New York, pp. 93-106.

Leibniz, G. W.
1701 *Memoire de M. Leibniz touchant son sentiment sur le calcul différentiel*, in «Journal de Trévoux»; ora in *Mathematische Schriften*, vol. V, Olms, Berlin 1962.

L'Hôpital, G.-F.-A. de
1696 *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Imprimerie Royale, Paris.

Łoś, J.
1955 *Quelques remarques, theorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres*, in Th. Skolem e altri, *Mathematical Interpretation of Formal Systems*, North-Holland, Amsterdam, pp. 98-113.

Löwenheim, L.
1915 *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, in «Mathematische Annalen», LXXVI, pp. 447-470.

Luxemburg, W. A. J.
1969 *A General Theory of Monads*, in *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Rinehart and Winston, New York, pp. 18-86.
1972 *A non-standard analysis approach to Fourier analysis*, in W. A. J. Luxemburg e A. Robinson (a cura di), *Contributions to Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, pp. 15-39.
1973 *What is non-standard analysis?*, in «The American Mathematical Monthly», LXXX, pp. 38-67.

Machover, M., e Hirshfeld, J.
1969 *Lectures on Non-standard Analysis*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York.

Puritz, C.
1972 *Skies, constellations and monads*, in W. A. J. Luxemburg e A. Robinson (a cura di), *Contributions to Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, pp. 215-43.
1976 *Quasi monadic spaces; a non-standard approach to convergence*, in «Proceedings of the London Mathematical Society», serie III, XXXIII, pp. 230-50.

Robinson, A.
1961 *Non-standard analysis*, in «Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings», serie A, n. 64, pp. 432-40.
1963 *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, North-Holland, Amsterdam (trad. it. Boringhieri, Torino 1974).

Robinson, A.
1966 *Non-Standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam.
1969*a* *Compactifications of Groups and Rings and Non-Standard Analysis*, in «Journal of Symbolic Logic», XXXIV, pp. 576-87.
1969*b* *Germs*, in W. A. J. Luxemburg (a cura di), *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Rinehart and Winston, New York, pp. 138-49.

Skolem, Th.
1920 *Logisch-Kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze, nebst einem Theorem über dichte Mengen*, Dybwad, Kristiania.

Sviluppatosi nell'ambito del **calcolo** (cfr. anche **numero** e **modello**), con motivazioni provenienti sia dalla matematica «speculativa» (cfr. **matematiche**) sia dalla **scienza** applicata (in particolare dalla **fisica**), l'infinitesimale si è rivelato come il **concetto** piú duttile per trattare matematicamente il **moto**, ma al tempo stesso come una **idea** portatrice di contraddizioni (cfr. **opposizione/contraddizione** e anche **dialettica**) a lungo non risolte. Presente con varie modalità in piú di un settore della matematica (cfr. ad esempio **curve e superfici**, **differenziale**, **funzioni**, **variazione** e anche **geometria e topologia** e **invariante**), al pari della nozione di **infinito** cui naturalmente rimanda, ha rappresentato una sfida appassionante per epistemologie e metafisiche rivali (cfr. **conoscenza**, **metafisica**, **filosofia/filosofie**).

Apparentemente eliminato col chiarimento dei problemi concettuali inerenti all'opposizione **continuo/discreto**, l'infinitesimale è riemerso ad esempio nel contesto dell'indagine dei linguaggi formali (cfr. **formalizzazione**), ambito specifico della **logica** (cfr. anche **deduzione/prova**). Nel quadro della teoria dei modelli in particolare (cfr. **teoria/modello** e anche **strutture matematiche**) si sono potuti esplicitare i problemi connessi con l'impiego della notazione infinitesimale nel ragionamento matematico e di conseguenza si è potuto rendere conto delle specifiche proprietà dell'infinitesimale come **simbolo** (cfr. anche **codice**, **segno**). L'infinitesimale si è cosí trasformato da paradosso in **metodo** (la cosiddetta analisi non standard) di notevole interesse euristico ed espositivo.

del pianeta Terra.
un disequilibrio
o luogo sotto
licano però
io/squi-
allora
ar-

Locale/globale

Pur avendo origine e sviluppi di tipo matematico, l'opposizione locale/globale ha un significato generale (enciclopedico) di carattere concettuale ed epistemologico. Essa fa parte di quelle grandi opposizioni la cui progressiva chiarificazione assicura alla scienza un valore trascendentale che oltrepassa la padronanza metodica dei fenomeni empirici. Tuttavia, a differenza di opposizioni classiche quali forma/sostanza, continuo/discreto, particolare/universale, la sua storia è recente: inizia approssimativamente con la metà del XIX secolo.

Questo articolo si propone d'indicare come, fondata all'origine nell'intuizione spaziale, l'opposizione locale/globale abbia invaso il campo matematico (geometrico e aritmetico) ed abbia condotto all'introduzione di metalinguaggi che hanno permesso in questi ultimi anni di riformulare alcuni dei problemi «dialettici» piú critici posti dalla struttura logico-semantico-sintattica delle lingue naturali. Tale «intrusione» inattesa ed enigmatica dell'intuizione spaziale nella grammaticalità attraverso una serie di passaggi matematici sempre piú profondi ed unitari solleva senza dubbio piú problemi di quanti ne risolva. Rende però esplicita una solidarietà fra i diversi livelli del campo simbolico la cui comprensione potrebbe forse trasformare in modo notevole la nostra concezione dei rapporti fra matematica, lingua e realtà.

Ciò premesso, gli aspetti matematici dell'opposizione locale/globale sono di una tale varietà che il presente articolo potrà solo indicarli, senza sperare di essere esaustivo: bisognerebbe infatti presentare un panorama pressoché completo di interi «continenti» della matematica quali la geometria differenziale, la topologia differenziale, la topologia algebrica, la teoria delle equazioni differenziali o la teoria delle singolarità. Se infatti l'opposizione locale/globale riguarda l'analisi dei molteplici rapporti dialettici che legano aspetti locali ad aspetti globali, essa si riferisce anche all'analisi delle strutture locali e di quelle globali in quanto tali. Il panorama qui presentato sarà quindi selettivo, ma il suo scopo sarà raggiunto se mostrerà al lettore come la chiarificazione matematica di una problematica tecnica ed *endogena* presenti una portata *paradigmatica* che fornisce degli ἀνάλογα per molti problemi finora rimasti imprigionati nel cerchio della speculazione filosofica.

1. *Alcuni aspetti epistemologici dell'opposizione locale/globale.*

1.1. Il problema dell'*Enciclopedia*.

Si consideri l'organizzazione lessico-semantica di un'opera interdisciplinare come questa *Enciclopedia*. Gli «articoli» sono raggruppati in «pacchetti» relativamente omogenei che individuano problematiche dai contorni abbastanza ben definiti. Ad esempio l'articolo «Locale/globale» è correlato da un punto di vi-

sta matematico ai seguenti argomenti, ognuno dei quali avrebbe potuto costituire un articolo indipendente: incollamento di modelli locali in oggetti globali, passaggio dal locale al globale ed analisi delle sue ostruzioni, metodi di analisi delle strutture locali e/o globali non banali, ecc.

Tali temi indicano problematiche «locali» governate sia da campi semantici locali (cioè da sistemi di concetti e di opposizioni concettuali specifiche) sia da tecniche regionali, teoriche e pratiche, specifiche ed adeguate.

Tali campi locali non sono indipendenti: essi parzialmente si ricoprono, si «incollano» per generare campi di estensione piú vasta. L'opposizione locale/globale, ad esempio, ricopre in parte le opposizioni centrato/acentrato, continuo/discreto, universale/particolare, spazio/funzione, alcune delle quali hanno dato luogo ad altri articoli di questa stessa *Enciclopedia*. Si pone quindi immediatamente il problema d'individuare il tipo di struttura globale offerto in definitiva dall'*Enciclopedia* in quanto oggetto testuale che vuole riflettere parzialmente l'organizzazione del nostro sapere. È ben noto come questo problema sia la croce del comitato di redazione. È però facile convincersi che procede dal fatto che lo «spazio» globale di una *Enciclopedia* non è rappresentabile. Rappresentabili sono solo i campi locali poiché, isotopi in senso semantico, essi dipendono da un codice. In conclusione il problema posto dall'*Enciclopedia*, e quindi dal sapere stesso, consiste nel fatto che non vi è una rappresentazione codificabile del suo «spazio» globale. L'*Enciclopedia* non è un dizionario.

1.2. L'opposizione locale/globale come problema semantico-lessicale.

Per precisare tale questione, si elimini il problema del sapere e ci si limiti alla struttura semantica di un lessico. Si incontrano due difficoltà tradizionali:

a) la non-esistenza di termini primitivi (circolarità delle definizioni in un dizionario);
b) la non-esistenza di sensi propri (irriducibilità dei tropi, degli effetti di metafora e di metonimia).

Queste due ostruzioni all'univocità globale del lessico evidenziano il fatto (fondamentale) che lo «spazio» globale del lessico non può essere ottenuto per semplice estensione della struttura dei campi locali. Solo localmente un lessico può essere univocamente ricostruibile a partire da componenti primitive. Si possono certo costruire, per allargamenti successivi, dei campi «piú» globali dei campi locali iniziali (l'opposizione locale/globale è essenzialmente relativa) ma nessuno di essi è identificabile con lo «spazio» globale del lessico. Non appena raggiunge un certo grado di complessità, un lessico non è mai «triviale», non possiede piú la struttura di un campo locale. Per fortuna, poiché la ricchezza delle lingue naturali è dovuta al fatto che il loro lessico non è globalmente triviale.

La ricerca classica della determinazione del senso proprio, dettata dalla preoccupazione, apparentemente lodevole, di rendere globalmente univoca la lingua, diventa in questo contesto una volontà di trivializzazione. Essa corrisponde all'idea che dovrebbe esistere uno spazio semantico «di base» globale ma avente

la struttura di campo locale e tale che ogni «senso figurato» possa prolungarsi in un campo locale situato «al di sopra» di esso. Invece l'irriducibilità dei tropi e la non-esistenza di termini primitivi significano proprio che un tale spazio di base esiste solo localmente. Ammettendo che lo «spazio» globale del lessico sia munito di una naturale relazione di prossimità semantica tra lemmi lessicali (cioè di una sorta di «topologia» canonica) i tropi stabiliscono delle identificazioni «a lungo raggio d'azione» – translocali – tra i campi locali e «lo spazio di base», giacché vi è sempre un momento in cui, per estensione, un senso «figurato» associato a un campo di base diventa un senso «proprio» per un campo diverso. Si può dunque dire che i tropi costituiscono la rappresentazione nell'ambito del codice stesso di uno stock aperto di operatori virtuali di incollamento tra campi locali. Il passaggio dal virtuale all'attuale di tali operatori dipende da una scelta. Ne consegue che non soltanto lo «spazio» globale del lessico non ha la struttura di un campo locale ma che esso non esiste neanche in quanto tale. Non esiste uno «stato» globale di base del lessico: i soli stati globali sono gli stati «eccitati» definiti da una scelta opportuna degli operatori di incollamento e sono quindi l'espressione di un soggetto produttivo dell'enunciazione. Passando cosí attraverso il problema logico-semantico, l'opposizione locale/globale viene ad intrecciarsi con l'opposizione oggettivo/soggettivo: un lessico è «oggettivo» (cioè intersoggettivo, codificabile) solo localmente.

All'impossibilità di rappresentare la struttura globale del lessico si aggiunge un'altra difficoltà, relativa alla struttura locale dei campi semantici: i campi semantici locali non sono continui, bensí sono dati in forma discreta. Per affrontare questo problema si userà la mediazione della percezione, e cioè si avrà a che fare con la questione della cosiddetta percezione categoriale. Si tratta di capire in che modo gli spazi di stimoli fisici variabili con continuità (fonemi, timbri musicali, ecc.) sono discretizzati dalla percezione. A tal fine gli stimoli vengono rappresentati, usando tecniche raffinate, in uno «spazio» di descrizione avente dimensione in generale assai limitata (mentre come entità fisiche tali stimoli appartengono in generale a spazi funzionali di dimensione infinita); tali spazi di descrizione sono muniti di una «topologia» esprimente la relazione percettiva di prossimità fra gli stimoli. In tali spazi gli stimoli si raggruppano in zone, gli stimoli di una stessa zona essendo ricevuti in modo equivalente. Le zone sono separate da «frontiere», distribuite mediante un sistema di soglie, vale a dire mediante una morfologia discriminante che pare essere determinata geneticamente. Durante una deformazione continua di uno stimolo, l'attraversamento di tale morfologia è accompagnato da una transizione «catastrofica» del riconoscimento percettivo. Parlare in questo contesto di «discretizzazione» significa solo affermare che lo «spazio» di descrizione considerato è uno «spazio» di differenziazione, differenziato dalla sua morfologia discriminante. A questo punto l'opposizione locale/globale s'intreccia con le opposizioni continuo/discreto e identità/differenza (cfr. tali articoli dell'*Enciclopedia*).

Il problema teorico posto da tali «spazi di differenziazione» ha importanza capitale. Poiché gli stimoli possono variare in modo continuo, in uno spazio detto

spazio substrato, la loro discretizzazione può provenire solo dalla struttura del *recettore*: si tratta quindi di «risalire» dalla morfologia osservabile di differenziazione alla dinamica non osservabile del recettore, concepito come una «scatola nera». Tale problema, che è in generale quello dello strutturalismo, ha ricevuto un inizio di risposta con la teoria delle catastrofi di René Thom (cfr. l'articolo «Catastrofi» in questa stessa *Enciclopedia*).

Ritornando alla struttura locale dei campi semantici, si osservi che la loro descrizione in termini di sistemi di scarti differenziali, di tratti distintivi o di opposizioni semiche culturalmente determinate, ne fa degli «spazi di differenziazione» senza substrato. Il «nonsenso» rappresentato da quest'idea di morfologie discriminanti sospese nel vuoto come il sorriso del gatto in *Alice in Wonderland*, costituisce, a parere di chi scrive, la seconda croce della semantica teorica (la prima, come si è visto, è quella del passaggio dal locale al globale). Sembra che essa possa venire eliminata soltanto in due modi, fra loro antagonisti, che coinvolgono l'insieme della teoria: facendo appello a formalismi intrinsecamente discreti di tipo logico-combinatorio (ed allora vietandosi ogni concezione non banale della semantica), oppure estendendo alla semantica il paradigma catastrofista [Petitot 1977] ed allora scontrandosi con la non-esistenza di metodi empirici adeguati a definire i continui che servono di spazio substrato ai campi semantici locali.

Ritornando al problema dell'*Enciclopedia* come oggetto globale, esso è stato assai ben formulato da Umberto Eco nell'ambito della semantica strutturale. Nella sua critica alla concezione logicista e dogmatica di Katz e Fodor, Eco osserva che essa «rappresenta la competenza ideale di un parlante ideale: in effetti esso tende a formulare un dizionario elementare che non può spiegare la competenza socializzata nella vivacità delle sue contraddizioni» [1975, p. 143]. Contrapponendo «dizionario astratto» (suscettibile localmente di una descrizione univoca in sistemi di componenti) ed «enciclopedia concreta» (rappresentante un soggetto), Eco osserva che nessun reticolo di semi può rappresentare la struttura globale della semiosi nella sua apertura illimitata. «Nessun grafo è in grado di rappresentarla nella sua complessità. Esso dovrebbe apparire come una sorta di rete polidimensionale, dotata di proprietà topologiche, dove i percorsi si accorciano e si allungano e ogni termine acquista vicinanze con altri, attraverso scorciatoie e contatti immediati, rimanendo nel contempo legato a tutti gli altri secondo relazioni sempre mutevoli» [*ibid.*, p. 176]. Si ritrova qui l'idea che un universo semantico è solo localmente codificabile e che i suoi stati globali sono stati «eccitati» (e cioè senza stato di base), dinamici e fluttuanti, esprimenti un soggetto dell'enunciazione e le sue idiosincrasie. «Il codice non è una condizione naturale dell'Universo Semantico Globale né una struttura soggiacente, in modo stabile, al complesso di legami e diramazioni che costituisce il funzionamento di ogni associazione segnica» [*ibid.*, p. 179].

Il linguaggio è lo strumento naturale dei soggetti giacché ogni lemma lessicale raggruppa ed anticipa un insieme aperto di «incollamenti» semantici, e giacché non esiste alcun incollamento canonico dei codici locali. Il soggetto è sempre

particolare poiché esso incarna il luogo in cui il semiotico «si distacca» dalla sua codifica locale per «passare al globale» attraverso identificazioni translocali idiosincrasiche. Si è in tal modo direttamente condotti dalla semiotica alla psicanalisi.

La psicanalisi infatti, almeno quella lacaniana, è fondata sull'ipotesi che tutti gli stati globali rappresentanti la «regolazione» psichica di un soggetto dell'enunciazione hanno in comune una sorta di «configurazione critica» che governa gli incollamenti semantici che li caratterizzano. La sua sfida è di «ridiscendere», con tecniche appropriate, dai discorsi del soggetto a tali «singolarità» organizzatrici per «risalire» a partire da esse verso una trasformazione della regolazione (la regolazione si manifesta clinicamente come fantasma e coazione a ripetere). Tale «chirurgia», la cui funzione è un rimaneggiamento della *performance* esistenziale (l'esistenza essendo, come a tutti è sperimentalmente noto, *performance* pura, senza competenza), può basarsi solo su un'istanza paradossale di mediazione della semantica «superficiale» degli stati globali con la semantica «profonda» (sessuale) evidenziata da Freud. Si tratta dell'istanza del significante lacaniano «radicato» nel registro pulsionale.

1.3. La «rettificazione» filosofica della lingua.

Le considerazioni precedenti mostrano come la lingua non sia – per ragioni strutturali – il supporto naturale della razionalità. Per divenirlo essa deve essere «rettificata». Tale rettificazione, che è alla base del desiderio filosofico positivo, punta ad una duplice violenza: *a*) rendere globalmente univoca la lingua; *b*) imporre alla lingua l'idea di realtà oggettiva come livello di base. Ciò implica anzitutto lo sradicamento del soggetto il cui idioletto inconscio organizza gli stati globali eccitati, particolari ed idiosincrasici, del sapere. Ciò implica poi, per una lingua ormai diretta verso l'obiettività come referente necessario ed ideale, la riduzione di ogni stato globale alla struttura di un campo locale. Tale riduzione si realizza attraverso un processo gerarchico di astrazione, il quale, nella misura in cui l'oggettività diviene in esso costituita e costituente, culmina nell'introduzione delle categorie (cfr. l'articolo «Categorie/categorizzazione» in questa stessa *Enciclopedia*).

Inoltre, la riduzione di un globale particolare a un locale categorico è inseparabile da altre due «rettificazioni»:

a) la rettificazione dello spazio-tempo per riduzione di uno spazio-tempo arcaico «fluttuante» ottenuto per incollamenti simbolici (per esempio totemici) di territori locali ad uno spazio-tempo geometrico ed universale ottenuto per estensione diretta della sua struttura locale (cfr. § 2.1);
b) la rettificazione della grammatica in logica.

Ciò premesso non si deve credere purtroppo che tale riduzione razionale al locale possa essere completa. Anzitutto essa trascura un resto inerente al problema della regolazione, in particolare della regolazione biologica. Tale difficoltà è stata vista con molto acume da Kant – il quale, non è il caso di dirlo, è uno dei «fari» della riduzione al locale – nella sua terza critica, la critica del giudizio.

Inoltre può essa stessa, in un secondo momento, divenire la molla per una proliferazione dialettica che ne rigenera l'origine globale. In questo senso la dialettica hegeliana può, ad esempio, essere interpretata come una restaurazione del globale dopo la riduzione kantiana al locale. Lo «spazio» del Concetto è uno spazio globale; per ciò stesso è non-rappresentabile, a meno di trasformare l'Assoluto in Soggetto; ammette solo stati globali «eccitati» la cui storia s'identifica con la Storia. In questo contesto la critica marxista dell'idealismo hegeliano consisterebbe in una nuova riduzione al locale, non piú categorica e trascendentale come in Kant, ma infrastrutturale ed immanente.

1.4. L'imperialismo del locale nelle scienze.

Nell'affrontare l'universo scientifico si ritrova ovviamente la metafora «geografica» delle «regioni» disciplinari (qui in posizione di campi locali); tuttavia la dialettica locale/globale vi subisce una vera mutazione.

Due sono le novità radicali che appaiono infatti con il metodo scientifico (che, giova ricordare, non si riduce al metodo sperimentale). Anzitutto la riduzione del globale non già al locale categorico od infrastrutturale ma al locale tipico di fenomeni elementari matematizzabili: perché il termine 'locale' ha un duplice significato: 1) localizzazione nell'universo dei fenomeni (e cioè scelta metodologica dei fenomeni elementari), e 2) localizzazione spazio-temporale. Questa riduzione è una *conditio sine qua non* per la comprensione. Come è stato piú volte osservato, le grandi teorie scientifiche (gravitazione, elettromagnetismo, ecc.) sono teorie a priori non locali che si è stati in grado di rendere locali. In secondo luogo la convinzione che il passaggio al globale (e cioè all'universo dei fenomeni) possa effettuarsi per estensione progressiva di un locale tipico assunto come livello di base universale. Tale «imperialismo» di un locale particolare (quello della fisica classica) che si pretende universale è appoggiato da quella ideologia scientifica di base che è il riduzionismo. È evidente che qui «ideologia» non significa opinione. L'imperialismo del locale domina le scienze poiché l'universalità della fisica classica è veramente effettiva ed è la sola suscettibile di assicurare la padronanza dei fenomeni.

A tale imperialismo se ne aggiunge ora un altro, critico per piú motivi, quello dell'informatica. Si può dire che questo nuovo imperialismo – che segue quello realizzato dalla matematica nella sua storica alleanza con la fisica classica – si basa sulla trasformazione del linguaggio in tecnologia e cioè sulla possibilità di far ripassare al globale, per imperialismo del locale, la riduzione logico-sintattica al locale del linguaggio.

Con l'estensione delle tecnologie fisiche ed informatiche la concezione classica dell'universalità scientifica (quella espressa dal programma di Laplace, per intendersi) viene ad avere un'universalità concreta, politico-economica. La *big science* mondiale, conseguenza dell'appropriazione da parte dell'industria americana del «genio» europeo, possiede ormai la capacità di controllare contemporaneamente sia la padronanza dei fenomeni sia il controllo sociale. Essa assume cosí il carattere di una scienza senza esterno che sottomette al potere generalizzato del

Capitale quanto, per le nostre culture, rappresenta la verità. Le conseguenze socioculturali ne sono incalcolabili.

Il «malessere» caratteristico delle società «unidimensionali» moderne è in gran parte dovuto al fatto che tutte le discipline hanno cercato, per sete di potere, di ripetere per proprio conto il processo storico con il quale la fisica è divenuta una scienza senza esterno. Esso è dovuto alla volontà sistematica di subordinare il globale a un imperialismo del locale privilegiante l'azione. Il vantaggio di un tale volontarismo è evidente: esso permette infatti una «internalizzazione», caratteristica per ogni disciplina, dei criteri di verità e con ciò stesso una proliferazione di competenze basata sull'idea di una qualche armonia prestabilita tra la suddivisione isonomica dell'essere e la divisione sociale del lavoro. Ma siccome la verità non ha alcun motivo per godere di tale armonia e siccome il «miracolo» della fisica è soltanto un miracolo regionale, l'insieme di tali strategie si dissolve in una parcellizzazione dei singoli poteri malgrado il gioco dell'interdisciplinarità ed il nuovo tipo di riduzione categorica al locale che vorrebbe essere realizzato da teorie universali quali, ad esempio, la teoria dei sistemi.

Per comprendere tale situazione, le critiche esterne della scienza non sono di alcuna utilità. Ciò di cui è drammaticamente carente il pensiero contemporaneo è una reinstaurazione del globale che sia compatibile con la riduzione metodologica del globale al locale tipico.

1.5. La matematica moderna come reinstaurazione del globale.

Una rinnovata instaurazione del globale in un campo incessantemente dominato da un imperialismo del locale può apparire a prima vista un'utopia. Si dimenticherebbe però che il valore trascendentale delle scienze proviene dal modo con cui la matematica pura vi è implicata (e non applicata). Ecco dunque, per concludere il paragrafo, alcune considerazioni sullo statuto generale della matematica moderna.

Una delle caratteristiche piú significative della matematica pura consiste nel saper costruire esplicitamente il proprio senso. In questo essa si oppone radicalmente ad ogni lingua naturale. Ma ciò non significa affatto (malgrado il pregiudizio assiomatico) che la sua «essenza» sia di essere una lingua formale ridotta ai propri automatismi generativi. Come ha osservato Thom, il generativismo matematico non sfocia nell'insignificanza, proprio in quanto è «incollato» in un modo o nell'altro a un'intuizione e soprattutto all'intuizione del continuo: è solo in quanto sbocca nello spazio come «forma simbolica» che l'iterazione automatica delle procedure algebriche sfugge allo «scollamento semantico».

Certamente la metafora geografica si applica all'universo matematico come ad ogni universo. In questo universo globale, la riduzione categorica al locale assume l'aspetto della cosiddetta (senza giochi di parole) teoria delle categorie e la riduzione logico-sintattica al locale, quello del metodo assiomatico. Queste due riduzioni sono fondamentali in quanto permettono alla matematica d'internalizzare in larga parte il problema della sua fondazione. Ma tale fatto non deve far perdere di vista che la matematica moderna è, per quanto riguarda la sua creati-

vità, dominata da un tipo di passaggio dal locale al globale analogo a quello considerato a proposito dell'*Enciclopedia*.

Infatti, per risolvere i problemi che si è data, la matematica moderna ha dovuto, almeno dopo Gauss e Galois, introdurre una serie di concetti translocali e praticare un'intensa attività analogica di parziale traduzione da una teoria all'altra. Tale «intertestualità» generalizzata si è accresciuta al punto che la rete logico-semantica della matematica moderna è divenuta assai simile a quella di una lingua naturale: la complessità globale della lingua matematica attuale si avvicina a quella di una lingua naturale, con la differenza assolutamente fondamentale però che il senso vi rimane esplicitamente costruito e le analogie dimostrabili.

Si può dunque dire che non esiste «stato di base» per la matematica: se la matematica moderna rimane unitaria ciò non avviene, come in fisica, per un imperialismo del locale; ma per il fatto che essa non possiede una struttura globale canonica, essendo i suoi soli stati globali degli stati «eccitati», ottenuti per analogie translocali. Le conseguenze di questa situazione sono assai numerose e diverse: eccone alcune positive ed altre negative.

1) A livello culturale, l'apparente dissoluzione degli oggetti matematici concreti in una intertestualità generalizzata rende le caratteristiche della creatività matematica incomprensibili ai non iniziati, cioè «esoteriche». Tale distacco della matematica dal contesto culturale è drammatico nella misura in cui la matematica costituisce ormai il solo luogo in cui sia ancora veramente pensabile una reinstaurazione del globale compatibile con la riduzione metodologica del globale al locale tipico. Orbene, si sono poco sopra sottolineate le conseguenze disastrose della mancata reinstaurazione del globale, non ultima delle quali è l'appropriazione generalizzata da parte del Capitale dell'armamentario scientifico e con esso di ciò che, nelle nostre culture, è la verità.

2) A livello pedagogico, la mancanza di una struttura globale canonica conduce a sopravvalutare la riduzione categorica e/o logico-sintattica al locale e cioè le tendenze assiomatiche e logiciste formali.

3) A livello della sociologia della matematica, l'idea di «grande» matematico discende direttamente dal fatto che, al di là della sua garanzia di coerenza, la matematica è l'espressione di un soggetto dell'enunciazione. È «grande» matematico ogni matematico che, per risolvere un problema locale giudicato cruciale, ha dato origine ad uno «stato» eccitato globale e cioè in definitiva a uno stile.

È d'altronde interessante fare qui un'osservazione a proposito del nome leggendario di Nicolas Bourbaki. Tale nome ricopre infatti una doppia realtà. Da un lato gli *Eléments de mathématique* sono un capolavoro della riduzione al locale e d'altro lato il *Séminaire* è un'enciclopedia degli stati globali «eccitati» del sapere matematico contemporaneo. Per Jean Dieudonné, «quando si studia la storia della matematica si constata quasi invariabilmente che una teoria inizia cercando di risolvere un problema molto particolare... Una situazione... favorevole è quella in cui, approfondendo le tecniche utilizzate per risolvere il problema di partenza, si arriva (eventualmente a prezzo di notevoli complicazioni) a usarle in altri problemi simili o piú difficili, senza tuttavia che si abbia l'impressione di capire veramente la ragione di tali successi; si può dire che sono i problemi a generare un

metodo... In alcuni casi abbastanza rari, lo studio del problema finisce, talvolta dopo un lasso di tempo notevolmente lungo, per rivelare l'esistenza di strutture soggiacenti insospettate, le quali non solo illuminano il problema posto, ma forniscono strumenti generali e potenti atti ad elucidarne un gran numero di altri in diversi ambiti» [1977, p. XII]. Dieudonné constata che la maggior parte degli argomenti esposti al Séminaire Bourbaki appartengono a quest'ultima categoria.

4) Ma la grande conseguenza di questa affinità della matematica moderna con una lingua naturale potrebbe essere quella di rompere l'alleanza storica della matematica con le scienze esatte, lasciando alle tecnologie informatiche tale compito, al fine di spostare la propria meta verso una rifondazione dei rapporti con la realtà. Attualmente, questo nuovo tipo d'impegno ontologico è rappresentato da quell'idea fondamentale di Thom secondo cui l'intertestualità matematica informata dall'intuizione spaziale ha raggiunto una maturità sufficiente per poter considerare una geometrizzazione del senso, ed attraverso di essa riprendere su basi radicalmente nuove i problemi classici della Caratteristica universale, del rapporto tra categorie di pensiero e categorie linguistiche e inoltre una elucidazione dialettica della regolazione biologica e del tempo come principio morfogenico: in breve, delle aporie che fino ad ora animavano il cuore speculativo del concetto.

2. *L'opposizione locale/globale e il concetto di spazio.*

Quello che precede mostra l'importanza di sviluppare un'intuizione del passaggio dal locale al globale. Per ottenere tale scopo l'indagine matematica è essenziale. Ad essa è dedicato quest'articolo.

2.1. Dalla rottura euclidea alle geometrie non-euclidee.

L'opposizione locale/globale è costitutiva della nostra rappresentazione dello spazio. È certo che il nostro spazio è localmente euclideo. Il nostro organismo ne offre un'eccellente simulazione. Ciò non implica peraltro che lo spazio «sia» globalmente euclideo. La natura della sua struttura globale sfugge a priori alla simulazione organica e non può quindi essere che l'oggetto di una rappresentazione, la cui storia è lungi dall'essere banale.

Per gli animali, lo spazio è un territorio: anzitutto è l'estensione a domini locali delle grandi regolazioni metaboliche quali la predazione; esso è inoltre un incollamento di tali domini locali mediante indizi significanti, per esempio «semantici», di natura sensoriale (per esempio olfattiva). Dunque non esiste una vera e propria rappresentazione globale dello spazio: la rappresentazione s'identifica ad una memorizzazione del sistema di indizi.

Si può forse avanzare l'ipotesi che la situazione sia analoga per ciò che concerne le società «primitive». Come scrive René Thom in un articolo dedicato alla magia, articolo dal quale si è d'altronde presa a prestito nel § 1 l'immagine di stato «eccitato» d'uno spazio globale flessibile ed individuale, «si può dire che l'atto magico sia caratterizzato in modo essenziale da "un'azione a distanza" che

può essere interpretata come una modificazione della topologia usuale dello spazio-tempo. In altri termini: i raccordi tra carte locali che definiscono lo spazio usuale non sarebbero fissi, ma potrebbero essere modificati secondo la volontà di certi uomini (maghi o stregoni), e ciò in virtú di procedure specifiche (rituali magici, sacrifici, ecc.). Inoltre la topologia dello spazio cesserà di essere la stessa per tutti, poiché le esperienze percettive di un osservatore possono a loro volta essere affette da azione magica» [1978, p. 70].

È chiaro che attualmente la nostra rappresentazione spontanea dello spazio è in netto contrasto con tale punto di vista. Per noi, lo spazio-tempo, come condizione di oggettività, è per natura a-soggettivo. Si tratta di uno spazio di base immutabile, universale, indipendente da ogni osservatore che non è suscettibile di alcuno stato «eccitato». Inoltre è uno spazio la cui struttura globale non si ottiene per incollamento di domini locali, ma per estensione diretta della sua struttura (euclidea) locale.

Non bisogna sottovalutare il fatto che questa rappresentazione spontanea ha per noi valore d'intuizione. Essa fa parte della nostra razionalità e le sue conseguenze sono innumeri. Se ne citano tre particolarmente evidenti.

1) Dal momento in cui lo spazio-tempo viene concepito come spazio di base universale, bisogna poter descrivere i fenomeni a partire da spazi di descrizione derivati dalla sua struttura. Questo vincolo epistemologico corrisponde a ciò che Husserl chiamava «l'ipotesi galileiana».

2) Dal momento in cui la struttura globale dello spazio si ottiene per estensione diretta della sua struttura locale, non è piú possibile individuare lo spazio se non attraverso un riferimento. Ma poiché tutti i riferimenti sono equivalenti (tutti gli osservatori essendo interscambiabili), la descrizione dei fenomeni deve nonostante tutto essere intrinseca (indipendente dal riferimento scelto): è l'origine del principio di relatività.

3) Dal momento in cui, divenuta intuizione, questa rappresentazione risulta *costitutiva* per un'obiettività identificata alla verità, la verità stessa si trova separata come dal filo di un rasoio dall'insieme del campo semiotico e simbolico. Tale separazione, tipica dell'epoca moderna, è all'origine dell'irriducibile conflitto che oppone la scienza alle pratiche simboliche (siano esse la filosofia speculativa, la fenomenologia, il materialismo dialettico, la psicanalisi) come alle pratiche significanti (siano esse la poesia, la pittura o la sperimentazione corporale).

Inquadrato in tale prospettiva, il «miracolo» geometrico greco sa di notevole violenza. Niente prova, certo, che la geometria euclidea si sia inizialmente ispirata alla struttura dello spazio fisico. Sembra piuttosto ch'essa si sia rifatta alla formalizzazione dei processi di costruzione geometrica. Ma ciò non impedisce ch'essa costituisca uno dei principali centri motori di quella «rettificazione» generalizzata del simbolico che, da allora, ha diretto la storia (cfr. § 1.3).

Se la struttura globale dello spazio si ottiene per estensione diretta della sua struttura euclidea locale (e converrebbe analizzare il ruolo della vista in tale estensione), dev'essere possibile far entrare in esso la nozione localmente intuitiva di rettitudine di una retta. Ciò tuttavia non è automatico. La nozione di rettitudine è localmente intuitiva poiché essa può essere «controllata», «regolata» da esperienze concrete. Tuttavia non esiste evidentemente alcun «controllo», alcuna «regolazione» di questo tipo a livello globale. Euclide ha compreso a fondo tutto questo: la nozione di retta è una nozione primitiva la cui proprietà caratteristica di rettitudine dev'essere oggetto di un «giudizio sintetico a priori», cioè d'un assioma logicamente irriducibile agli altri assiomi della geometria: si tratta del famoso assioma delle parallele. In tal senso la geometria non è una scienza a priori come lo è la logica. Essa esige una «regolazione» capace di controllare la coerenza del passaggio del proprio concetto primitivo dal locale al globale.

È ben noto che l'assioma di Euclide ha fatto scorrere molto inchiostro. Una precisa tradizione, nutrita dal desiderio di fare della geometria una scienza a priori, ha tentato di «dimostrarlo», di dedurlo cioè dagli altri assiomi della geometria. Nel corso dei secoli l'impossibilità di arrivare ad una tale «dimostrazione» sapeva di vero e proprio «scandalo». Tale scandalo è stato messo definitivamente a tacere all'inizio del XIX secolo allorché Gauss, Bolyai e Lobačevskij dimostrarono che gli altri assiomi della geometria euclidea ammettevano un'interpretazione coerente che violava l'assioma delle parallele. Questa nuova geometria è la geometria iperbolica, caratterizzata da una serie di fenomeni atipici. Essa ha offerto il primo esempio di un fenomeno che è fondamentale per il tema di quest'articolo. Localmente, cioè in ogni dominio d'estensione «infinitesimale», la geometria iperbolica diventa euclidea. In altri termini, uno spazio iperbolico ammette in ogni punto uno spazio euclideo «tangente». Si può dunque dire che la geometria iperbolica concretizza un altro modo di estendere al globale la struttura euclidea locale dello spazio, diverso da quello dell'estensione diretta.

2.2. Le diverse estensioni del concetto di spazio.

Prima d'indagare in qual modo, nel corso del XIX secolo, l'aspetto operativo dell'opposizione locale/globale ha rivoluzionato il concetto stesso di geometria, verrà ricordato in quale contesto si è sviluppata tale trasformazione.

Fino all'inizio del XIX secolo, la geometria si ridusse essenzialmente allo studio di oggetti geometrici (cfr. l'articolo «Curve e superfici» in questa stessa *Enciclopedia*) immersi in uno spazio ambiente bi- o tridimensionale. I metodi utilizzati sono da una parte quelli sintetici ereditati dalla tradizione euclidea e dall'altra quelli analitici ed algebrici fondati sull'uso di coordinate. Con l'introduzione del calcolo infinitesimale, le coordinate permettono l'analisi delle proprietà differenziali degli oggetti (equazione delle tangenti, delle normali, struttura dei punti singolari, ecc.). Ecco apparire i primi teoremi generali sulle curve algebriche e la «solidarietà» che esiste tra la loro struttura locale e quella globale. Servano da esempio due famosi risultati di Maclaurin (uno dei grandi successori di Newton): una curva piana irriducibile di grado n non può possedere piú di $[(n-1)(n-2)]/2$ punti doppi; su una cubica piana dotata di punti di flesso, la retta che ne congiunge due passa necessariamente per un terzo.

Ma l'approfondimento di tali problemi porterà, durante il XIX secolo, ad una completa ristrutturazione del concetto di spazio ambiente nel quale gli oggetti geometrici si trovano immersi.

Intanto, per poter disporre di teoremi generali (in particolare del teorema di Bézout secondo cui due curve piane di rispettivi gradi r e s s'intersecano esattamente in rs punti contati con la loro molteplicità), si estende sistematicamente la nozione di spazio ambiente agli spazi proiettivi complessi ottenuti aggiungendo i punti all'infinito e i punti immaginari. Con Poncelet, Steiner, Staudt, Plücker, Cayley, ecc. la geometria proiettiva complessa eserciterà una fortissima influenza. Permetterà dapprima di dimostrare tanti risultati sulla struttura generale delle curve e delle superfici algebriche e in particolare sulla solidarietà locale/globale: configurazione dei nove punti di flesso di una cubica piana, situati a tre a tre su dodici rette; configurazione delle ventisette rette della superficie cubica; ecc. D'altra parte la geometria proiettiva condurrà alla considerazione di «spazi» i cui «punti» non sono punti nel senso geometrico del termine. Per esempio lo studio dei complessi di rette dello spazio proiettivo tridimensionale $\mathbf{P}^3$ condurrà Cayley e Plücker alla rappresentazione di una *retta* di $\mathbf{P}^3$ mediante un *punto* di un'ipersuperficie di secondo grado di $\mathbf{P}^5$ (coordinate plückeriane). S'introduce cosí l'idea fondamentale che la geometria di entità complesse immerse in uno spazio ambiente triviale è traducibile nella geometria dei punti di uno spazio di descrizione: *a*) di dimensione eventualmente superiore a tre; *b*) globalmente non triviale.

La geometria proiettiva permetterà altresí a Klein, nel suo programma di Erlangen, di unificare i diversi tipi di geometrie (cioè di struttura degli spazi ambienti tipo) (cfr. l'articolo «Geometria e topologia» in questa stessa *Enciclopedia*).

Parallelamente ai progressi della geometria proiettiva prenderanno corpo le nozioni di spazio vettoriale e di algebra lineare. Questa nuova estensione del concetto di spazio avrà una notevole importanza quando la si prolungherà all'analisi funzionale, quando cioè si tratterà una funzione come un «vettore» decomponibile secondo vettori base (analisi armonica e serie di Fourier) e si estenderà l'analisi spettrale degli operatori lineari agli operatori differenziali.

Le strutture della geometria proiettiva e dell'algebra lineare sono per essenza globali. Con Riemann s'introdurrà un'altra idea chiave, d'importanza capitale, poiché con i suoi effetti domina il presente tema *nel suo insieme*. Si tratta dell'idea di considerare «spazio» a tutti gli effetti ogni spazio ottenuto per incollamento di modelli locali, cioè di pezzi di spazio ambiente tipo. Si tornerà ampiamente su quest'argomento. Si noti semplicemente che quest'idea sovverte totalmente la nostra intuizione di spazio poiché rompe con «l'evidenza» che la struttura globale dello spazio si ottiene per diretta estensione dalla sua struttura locale. Con Riemann il problema del passaggio dal locale al globale si allontana da ogni intuizione e diventa una problematica matematica fondamentale.

3. *L'opposizione locale/globale nella teoria delle funzioni: il caso analitico.*

Riemann è l'iniziatore di due aspetti della dialettica locale/globale. Da un lato l'aspetto delle varietà riemanniane (cfr. § 4) e dall'altro quello delle superfici di Riemann brevemente delineato nel presente paragrafo.

Ciò che precede serviva ad introdurre il rapporto esistente tra l'opposizione locale/globale e il concetto di spazio, piú precisamente di spazio ambiente. Viene ora introdotto il rapporto tra tale opposizione e il concetto di funzione, in quanto la dialettica spazio/funzione è una delle chiavi di volta di tutta la geometria moderna.

3.1. Le diverse classi di funzioni reali.

Si consideri un polinomio a coefficienti reali, per esempio di secondo grado, $P(x)=ax^2+bx+c$. Si tratta di una funzione $P:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ che associa a ogni numero reale x un altro numero reale $P(x)$ (detto valore di P in x), ottenuto mediante l'algoritmo rappresentato dalla sua espressione algebrica. Si supponga P noto per tre valori distinti x_1, x_2 e x_3. I suoi coefficienti saranno allora le soluzioni di un sistema di tre equazioni lineari in tre incognite:

$$(1)\qquad \begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=P(x_1)\\ ax_2^2+bx_2+c=P(x_2)\\ ax_3^2+bx_3+c=P(x_3).\end{cases}$$

È facile vedere che se x_1, x_2 e x_3 sono distinti, il sistema (1) ammette soluzione unica. Se dunque P è noto in tre punti distinti, è noto dappertutto. In generale, un polinomio di grado n è determinato quando siano assegnati i valori che esso assume in $n+1$ punti distinti.

Che un'informazione finita basti a caratterizzare P è un fatto cruciale che può essere localizzato. Se infatti x_1, x_2 e x_3 sono infinitamente vicini, ossia si confondono in un punto x_0, il dato $(P(x_1), P(x_2), P(x_3))$ viene sostituito dal dato $(P(x_0), P'(x_0), P''(x_0))$ ove P' e P'' sono le derivate prima e seconda di P. Il sistema (1) viene allora sostituito con il sistema

$$(2)\qquad \begin{cases} ax_0^2+bx_0+c=P(x_0)\\ 2ax_0+b=P'(x_0)\\ 2a=P''(x_0)\end{cases}$$

e si verifica facilmente la formula fondamentale

$$(3)\qquad P(x)=P(x_0)+(x-x_0)\,P'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}P''(x_0).$$

In generale ogni polinomio di grado n soddisfa una importante identità (4) detta formula di Taylor che permette di esprimerlo in funzione del suo valore e di quelli delle sue derivate successive in un punto qualsiasi x_0:

$$(4)\qquad P(x)=P(x_0)+(x-x_0)\,P'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}P^{(n)}(x_0).$$

Ora la nozione di derivata è per sua natura locale. La formula di Taylor esprime dunque il seguente fatto molto importante: per i polinomi, la determi-

nazione locale implica quella globale. Per i polinomi, e piú in generale per gli insiemi algebrici definiti da polinomi, esiste una solidarietà essenziale tra locale e globale. Si potrebbe dire che i polinomi manifestano un principio translocale «d'azione a distanza»: non si può perturbare un polinomio in un punto senza modificarlo dappertutto.

Ciò è in netto contrasto con quanto avviene nel caso delle funzioni che sono semplicemente differenziabili. Infatti, per questo le perturbazioni locali non si «propagano»: due funzioni differenziabili possono coincidere localmente senza coincidere dappertutto (fig. 1).

Ecco dunque delinearsi due domini estremi entro l'insieme delle applicazioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ad una estremità vi è il dominio caratterizzato da una proprietà di consistenza. Esso si estende dalle funzioni insiemistiche qualsiasi non aventi alcuna coesione neppure locale, fino alle funzioni indefinitamente differenziabili (di classe $\mathcal{C}^\infty$), passando dalle funzioni continue (che possono essere molto «patologiche») e dalle funzioni differenziabili fino all'ordine r (di classe $\mathcal{C}^r$) per $r = 1, 2, \ldots$ In tale dominio, *a*) non vi è alcuna solidarietà tra il locale e il globale; *b*) non esiste un'espressione, mediante simboli, delle funzioni. All'altra estremità vi è il dominio dei polinomi ove *c*) vi è solidarietà tra il locale ed il globale; *d*) esiste un'espressione delle funzioni, mediante simboli, che rende i polinomi degli algoritmi. (Cfr. fig. 2).

Il problema consiste allora nel sapere come si raccordano questi due domini; in altri termini, come si può, partendo dalla differenziabilità, raggiungere un'espressione simbolica e una solidarietà tra locale e globale.

Partendo dai polinomi, la mediazione verso le funzioni differenziabili s'effettua per estensione dal finito al numerabile. Si ottengono cosí le serie formali $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ che sono in un certo senso polinomi di grado infinito. Ma passando cosí dal finito al numerabile nulla piú garantisce che $P(x)$ rappresenti un numero. Volendo delle serie che rappresentino funzioni, bisogna limitarsi a considerare serie convergenti. Se una serie è convergente per un valore x_0, lo è per ogni altro valore x tale che $|x| \leq |x_0|$. Essa lo è dunque in un intervallo $|x| < R$. R si chiama il suo raggio di convergenza.

Partendo ora dalle funzioni $\mathcal{C}^\infty$, la mediazione verso i polinomi s'effettua tramite il concetto di serie di Taylor. Se f è $\mathcal{C}^\infty$, le si può associare, per ogni valore x_0, la serie formale $T_{x_0} f$, detta sua serie di Taylor in x_0:

$$T_{x_0} f = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots \tag{5}$$

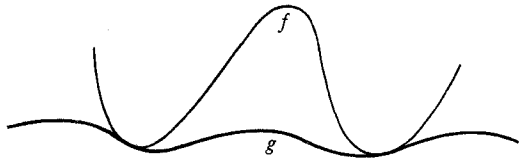


Figura 1.
f e g sono localmente identiche senza esserlo globalmente.

che generalizza l'approssimazione lineare di f in x_0 mediante la tangente di equazione $y = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0)$. La serie di Taylor di f in x_0 è d'importanza fondamentale poiché esprime il miglior modo d'approssimare f mediante polinomi. Per definizione si tratta di un'entità locale. Quando x_0 varia, essa definisce dunque un'applicazione Tf di $\mathbf{R}$ nell'algebra delle serie formali detta campo tayloriano di f e che «meglio» esprime come la consistenza differenziabile può «raggiungere» un'espressione simbolica.

La nozione di serie di Taylor permette di «misurare» lo scarto tra funzioni differenziabili e polinomi. È possibile constatare che tale scarto è irriducibile. Infatti:

a) La serie formale $T_{x_0} f$ può essere divergente e pertanto non rappresentare alcuna funzione. Tale fenomeno di divergenza è ineliminabile, secondo un teorema di Borel per cui *ogni* serie formale può essere ottenuta come serie di Taylor.

b) Anche se la serie $T_{x_0} f$ è convergente, può rappresentare nell'intorno di x_0 un'altra funzione, diversa da f. Per esempio le funzioni dette piatte del tipo e^{-1/x^2} la cui serie di Taylor in 0 è identicamente nulla e rappresenta dunque nell'intorno di 0 la funzione 0 e non la funzione stessa.

Il passaggio tra i polinomi e le funzioni $\mathcal{C}^\infty$ s'effettua dunque in questo modo:

a) «Vicinissimo» ai polinomi si trovano le funzioni $\mathcal{C}^\infty$ esprimibili simbolicamente, le quali manifestano una notevole solidarietà tra il locale e il globale, cioè quelle per cui una determinazione locale implica la determinazione globale. Si tratta delle funzioni *ovunque* rappresentate dalla loro serie di Taylor in *un* punto qualunque. Tali funzioni diconsi *intere*. Esempio tipico ne è l'esponenziale e^x che è ovunque uguale alla somma della sua serie di Taylor in 0:

$$T_0 e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

b) Si trovano poi le funzioni localmente rappresentate in ogni punto dalla loro serie di Taylor. Esse diconsi analitiche.

c) Si trovano infine le funzioni semplicemente $\mathcal{C}^\infty$.

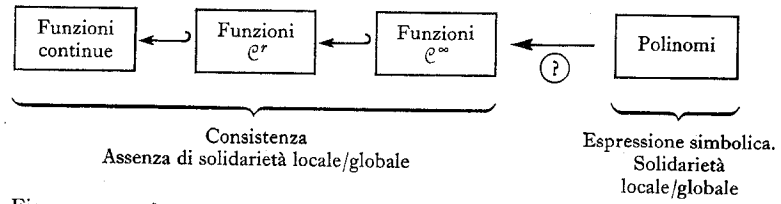


Figura 2.
Le classi estreme di funzioni.

Generalizzando tali risultati alle funzioni di piú variabili, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, poi alle funzioni complesse, $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^p$, poi, per localizzazione ai germi di funzioni, ed ancora, per incollamento, alle funzioni definite su varietà qualunque, si possono cosí definire livelli di struttura geometrica: il livello insiemistico, il livello topologico, il livello differenziabile, il livello formale (detto anche algebroide), il livello analitico ed infine quello algebrico corrispondente ai polinomi. Gran parte della geometria moderna è consacrata allo studio locale e/o globale di tali livelli, ai tipi di dialettica locale/globale che sono loro specifici, all'analisi dei vincoli che un livello inferiore esercita sui livelli superiori. Perché tali analisi andassero in porto è stato necessario elaborare strumenti generali la cui portata concettuale s'è rivelata considerevole.

3.2. Prolungamento analitico e superfici di Riemann.

L'analiticità acquista tutto il suo significato quando si passa dal reale al complesso e si considerano funzioni $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ d'una variabile complessa, a valori complessi. Sia f una tale funzione. La si può considerare una $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ che al punto $z = x + iy$ di $\mathbf{R}^2$ associa il punto $P(x, y) + iQ(x, y)$ di $\mathbf{R}^2$, ove P e Q sono due funzioni reali di due variabili reali. Se si tenta allora di definire per f il vincolo di **C**-derivabilità in z_0, si constata subito che esso è totalmente diverso dalla **R**-derivabilità. Dire infatti che f è **C**-derivabile in z_0 significa non solo che il rapporto $[f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$ tende a un limite quando z tende a z_0, ma anche che tale limite è indipendente dal modo con cui z tende a z_0. È facile vedere che per soddisfare tale vincolo occorre e basta che le funzioni P e Q ammettano derivate parziali e soddisfino alle cosiddette condizioni di Cauchy-Riemann:

$$(5) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Se si suppone che P e Q siano due volte **R**-differenziabili, tali condizioni implicano che P e Q soddisfino l'equazione di Laplace:

$$(6) \qquad \Delta P = 0 \qquad \Delta Q = 0$$

ove Δ è l'operatore laplaciano $(\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2)$.

Una funzione $F(x, y)$ che soddisfa l'equazione di Laplace dicesi armonica; P e Q diconsi funzioni armoniche coniugate.

Il fatto che, affinché f sia derivabile, P e Q devono soddisfare un'equazione alle derivate parziali, porta con sé una serie di notevoli conseguenze che fanno della **C**-derivabilità un vincolo che non ha nulla a che fare con quello della semplice **R**-derivabilità. Si noti anzitutto che la nozione di **C**-derivabilità è di per se stessa locale. Per passare al globale si considereranno dunque funzioni definite su aperti U di **C** e si dirà che esse sono **C**-derivabili su U se lo sono in ogni punto di U.

Osservazione: La nozione topologica di aperto concretizza la relatività dell'opposizione locale/globale. Un aperto, che per definizione è un intorno di ogni suo punto, può diventare vuoi un'entità locale quando lo si consideri sottospazio di uno spazio globale, vuoi un'entità globale quando lo si consideri unione degli aperti in esso contenuti.

Sia dunque $f : U \to \mathbf{C}$ una funzione complessa definita su un aperto U di **C** e **C**-derivabile.

a) Tutti i valori di f sono solidali. Tale solidarietà è espressa dalla formula integrale di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}$$

la quale afferma che il valore di f in $z_0 \in U$ è la media dei valori di f su ogni circuito γ di U orientato positivamente, che circondi z_0 e che sia contraibile a un punto entro U. (Si dice in tal caso che il circuito γ è omotopo a zero). Una conseguenza fondamentale di ciò è il «principio di massimo» secondo cui se f non è costante, il suo modulo $|f(z)|$ non può possedere né massimo né minimo.

b) Se g è un'altra funzione **C**-derivabile definita su U, f e g non possono essere localmente identiche senza esserlo globalmente. Per le funzioni **C**-derivabili una determinazione locale implica la determinazione globale.

c) f è necessariamente indefinitamente **C**-derivabile.

d) f è di piú **C**-analitica.

e) f è di piú **C**-intera.

Cosicché nel campo complesso la semplice derivabilità basta ad implicare il piú potente vincolo di solidarietà tra locale e globale. Le funzioni **C**-derivabili, e quindi **C**-analitiche per *d*), diconsi anche olomorfe. L'olomorfia è una nozione intrinsecamente locale ma che «passa» automaticamente al globale. È dunque naturale cercarne una caratterizzazione globale (teorema di Runge).

La piú notevole conseguenza della solidarietà locale/globale che caratterizza le funzioni **C**-analitiche è che la determinazione locale implica non solo la determinazione globale ma anche la determinazione dello stesso dominio di definizione. Se f è localmente un polinomio, lo è dappertutto ed è definita su **C**. Ma nel caso generale il suo dominio naturale può essere molto diverso da **C**. Si è di fronte ad un totale capovolgimento di punto di vista poiché la nozione di «spazio substrato», di spazio soggiacente a una funzione, cioè in definitiva di spazio ove naturalmente la variabile indipendente z «sta di casa», non ha piú senso che localmente, dato che la funzione stessa determina, a livello globale, il proprio spazio substrato.

Per precisare questo punto fondamentale, viene ora illustrata una descrizione data da Weierstrass e poi chiarita in modo definitivo da Hermann Weyl [1955].

Sia f una funzione olomorfa su un aperto U di **C**. f si rappresenta in ogni punto col suo sviluppo di Taylor $T_{z_0} f$ in un punto $z_0 \in U$. Per cogliere le proprietà di passaggio dal locale al globale è dunque naturale partire da $T_{z_0} f$, cioè da una serie convergente $\mathcal{A}(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots$ Si chiama

elemento analitico (nel senso di Weierstrass) centrato in z_0, e lo si denota $(\mathcal{A}(z), z_0)$, un tale dato. Questo elemento definisce localmente una funzione olomorfa f il cui valore in z_0 è il termine costante a_0 della serie $\mathcal{A}(z)$.

Sia dunque $\mathcal{A} = (\mathcal{A}(z), z_0)$ un elemento analitico centrato in z_0. Sia Δ il disco di centro z_0 e di raggio R che è il disco di convergenza di $\mathcal{A}(z)$. Esistono dei punti singolari z_s del bordo di Δ nei quali la serie $\mathcal{A}(z)$ diventa divergente e che impediscono dunque l'estensione di f a un disco piú grande di Δ con centro in z_0. Il fatto però che esistano tali ostruzioni non implica che non si possa prolungare f ad un disco con centro in un punto z, distinto da z_0 che «fuoruscirebbe» da Δ evitando i punti singolari z_s della sua frontiera. Infatti in un intorno di z_1 appartenente a Δ, f si può rappresentare mediante un elemento analitico $(\mathcal{B}(z), z_1)$ centrato in z_1. Tale elemento possiede un disco di convergenza Δ' centrato in z_1 e limitato da certe singolarità z'_s. Nulla impone che Δ' sia contenuto in Δ. Inoltre il fatto che una funzione **C**-analitica sia globalmente determinata dalla sua struttura locale implica che le somme delle serie $\mathcal{A}(z)$ e $\mathcal{B}(z)$ sono identiche su $\Delta \cap \Delta'$. La funzione uguale alla somma di $\mathcal{A}(z)$ su Δ e alla somma di $\mathcal{B}(z)$ su Δ' è dunque ben definita e olomorfa su $\Delta \cap \Delta'$. È questo il principio del prolungamento analitico (fig. 3): il prolungamento analitico è definito in modo unico.

Per prolungamento analitico si estende cosí l'elemento analitico di partenza $(\mathcal{A}(z), z_0)$ in una funzione olomorfa globale f. Si potrebbe credere che il dominio di definizione di f sia semplicemente il piano complesso privato dei punti singolari. Ma ciò non avviene in generale. Può succedere infatti che prolungando $\mathcal{A}$ lungo una catena chiusa $\Delta, \Delta', \ldots$ ecc. si torni all'intorno di z_0 mediante un elemento analitico il cui valore in z_0 sia diverso da quello di $\mathcal{A}(z)$. Considerata come definita su **C**, la funzione globale f sarebbe dunque multiforme. Ora, f, per costruzione, è uniforme. La chiave di questo apparente «paradosso» risiede semplicemente nel fatto che, com'è stato già detto, $\mathcal{A}(z)$ determina per prolungamento non solo f ma anche il suo spazio substrato. Tale spazio substrato non deve piú essere considerato in sé come uno spazio «esterno» sul quale f sarebbe definita, ma come uno spazio intrinsecamente attaccato ad f. Lo si denoterà con Σ.

Si può poi completare la costruzione tenendo conto dei punti singolari e dei

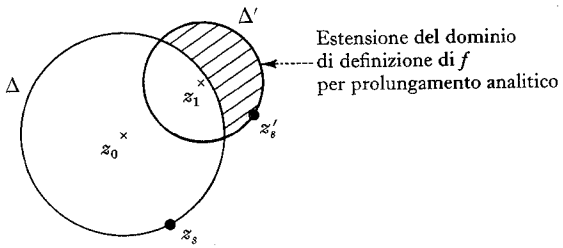


Figura 3.
Principio del prolungamento analitico.

punti in cui Σ si ramifica. I punti singolari sono sia poli, sia punti singolari essenziali. I punti di diramazione sono i punti z_0 tali che f possiede n determinazioni nell'intorno di z_0 ma *meno* di n determinazioni in z_0. Il caso tipico viene fornito dalla funzione $\sqrt{z}$ che per ogni valore di $z \neq 0$ possiede due determinazioni $\pm\sqrt{z}$, ma un sol valore (0) in 0. Se allora si completa Σ mediante i poli e i punti di diramazione e la base **C** di Σ mediante l'aggiunta di un punto all'infinito per tener conto dei poli e dei punti di diramazione all'infinito (cosa che fornisce la sfera di Riemann $\bar{\mathbf{C}}$), Σ diventa un rivestimento ramificato di $\bar{\mathbf{C}}$ privato dei punti essenziali; esso dicesi superficie di Riemann dell'elemento analitico $(\mathcal{A}(z), z_0)$ e della funzione globale f ch'esso determina per prolungamento analitico.

La superficie di Riemann Σ di f è canonicamente munita d'una proiezione $z : \Sigma \to \bar{\mathbf{C}}$ che associa ad ogni elemento analitico di Σ il suo centro. Essa è anche evidentemente il dominio di f. Si ottiene dunque in definitiva lo schema

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{f} & \bar{\mathbf{C}} \\ {\scriptstyle z}\downarrow & & \\ \bar{\mathbf{C}} & & \end{array}$$

che evidenzia bene il radicale spostamento introdotto. Σ è lo spazio globale ove naturalmente «sta di casa» la variabile indipendente z. Soltanto localmente la z continua ad essere una variabile. Globalmente essa diventa la proiezione canonica della superficie di Riemann di f. Come nota Weyl: «Prima di iniziare lo studio di una classe di funzioni si deve definire la superficie che è il dominio della variabile indipendente; si deve poi stabilire cosa significa funzione analitica su tale superficie che diventa cosí una superficie di Riemann. Solo a questo punto ci si può occupare delle funzioni stesse» [1955, p. 43].

Osservazione: Il fatto che z diventi una funzione e non piú una variabile pone il problema, detto dell'uniformizzazione globale, di sapere se il suo statuto di variabile può essere «recuperato» in uno spazio differente (cfr. oltre).

3.3. Richiamo dei lavori di Riemann sulle curve algebriche.

La nozione di superficie di Riemann acquista tutto il suo significato nel caso in cui z ed f sono legate da una relazione algebrica, cioè annullano un polinomio in due variabili $P(z, f) = 0$. In tal caso essa fornisce uno straordinario strumento atto allo studio delle funzioni analitiche; la grande idea di Riemann è infatti che la superficie di Riemann Σ d'un elemento analitico – esattamente come lo è **C** – deve essere considerata come spazio substrato naturale per delle funzioni analitiche.

1) Sia C una curva algebrica di $\mathbf{C}^2$, cioè l'insieme dei punti (z, w) di $\mathbf{C}^2$ che annullano un polinomio irriducibile, $P(z, w)$. C è una superficie di $\mathbf{R}^4$. L'analisi locale di C si divide in due parti.

La prima è quella della struttura di C nell'intorno d'un punto regolare, cioè d'un punto (z, w) in cui le due derivate parziali $\partial P/\partial z$ e $\partial P/\partial w$ non sono entrambe nulle. Il teorema fondamentale al riguardo è il seguente:

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE. *Se* $(z, w) \in \mathbf{C}^2$ *è tale che* $\partial P/\partial w \neq 0$, *C è, localmente, in* (z, w) *il grafico d'una funzione analitica* $w = w(z)$.

Osservazione: Poiché in un punto regolare si ha $(\partial P/\partial w) \neq 0$, oppure $(\partial P/\partial z) \neq 0$, se $(\partial P/\partial w) = 0$, z sarà localmente esprimibile come funzione analitica $z(w)$ di w.

Il teorema delle funzioni implicite è fondamentale poiché mostra che, in un certo senso, l'analitico permette di localizzare l'algebrico. Pertanto, partendo dall'espressione analitica locale $w = w(z)$ si riottiene C per passaggio al globale, grazie al principio del prolungamento analitico. Quello ch'è in gioco non è tanto la solidarietà locale/globale comune all'algebrico e all'analitico, quanto la forma dell'equazione che definisce la curva C. Dire che il polinomio $P(z, w)$ di cui C è il luogo degli zeri è irriducibile, significa che non può essere ridotto alla forma di base $w = w(z)$: $P(z, w) = 0$ è un'equazione algebrica globale non riducibile a una funzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Le equazioni analitiche locali invece, di cui il teorema delle funzioni implicite afferma l'esistenza, sono proprio della forma di base $w = w(z)$. Ma non sono equazioni globali. Esse variano al variare del punto (regolare) scelto.

L'interpretazione geometrica del teorema delle funzioni implicite è semplice (fig. 4). Si consideri la proiezione canonica $\pi : (z, w) \to z$. Il teorema afferma essenzialmente che, laddove tale curva è trasversa alle fibre di π, essa è localmente una sezione di π, se si chiama sezione di π un'applicazione analitica $w : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^2$ tale che $\pi \circ w = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$.

Lo studio locale di C nell'intorno dei suoi punti singolari (necessariamente isolati) ove $(\partial P/\partial z) = (\partial P/\partial w) = 0$ è piú complicato. Si fa vedere che C si decompone in rami (in corrispondenza alle diverse tangenti) analiticamente irriducibili (teoria degli sviluppi di Puiseux).

Infine l'analisi della struttura globale di C conduce nuovamente alla nozione di superficie di Riemann. Si scriva infatti il polinomio $P(z, w)$ nella forma

$$P_z(w) = a_0(z) + a_1(z)w + \ldots + a_n(z)w^n$$

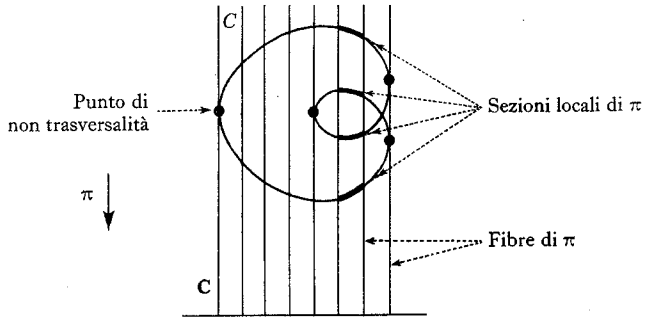


Figura 4.
Interpretazione geometrica del teorema delle funzioni implicite.

con i coefficienti $a_i(z)$ polinomiali, e si associno ad ogni valore di z le n radici di $P_z(w)$; si ottiene allora una presentazione della curva C, completata dei suoi punti all'infinito, sotto forma di un rivestimento ramificato di $\bar{\mathbf{C}}$.

Ancora piú significativa è la proprietà reciproca:

TEOREMA. *Se la superficie di Riemann* Σ *di una funzione analitica* f *è compatta, allora* f *verifica un'equazione algebrica* $P(z, f) = 0$. *In altre parole,* Σ *si identifica con una curva algebrica proiettiva* C.

È impossibile sottovalutare l'importanza della rottura epistemologica introdotta da Riemann nel porre la dialettica locale/globale al centro dello studio delle funzioni analitiche e delle curve algebriche. Questo nuovo punto di vista, che è un punto di vista sintetico, è infatti all'origine di tutta la geometria algebrica moderna. Cosí scrive Dieudonné: «Il periodo... senza dubbio piú importante di tutta la storia della Geometria Algebrica... è interamente marcato dall'opera d'un solo uomo, Bernhard Riemann, uno dei piú grandi matematici che siano mai esistiti, uno di quelli che hanno piú profondamente sentito (o divinato) *l'unità* essenziale della matematica» [1947, p. 42]. Utilizzando il linguaggio analogico del § 1, si potrebbe dire che l'opera di Riemann costituisce il primo esempio d'uno stato «eccitato» globale dell'universo matematico.

2) Una superficie di Riemann compatta, cioè, per quanto visto, una curva algebrica proiettiva (piana), possiede quattro livelli di struttura. Il livello soggiacente è quello topologico. Il livello intermedio è quello differenziabile. I livelli superiori sono l'analitico e l'algebrico i quali, come s'è visto, coincidono. Una delle grandi idee introdotte e sviluppate da Riemann è che il livello topologico vincola i livelli superiori. Tipico al riguardo è il concetto di genere. Esiste infatti una classificazione topologica delle superfici connesse, compatte ed orientabili: ogni superficie connessa, compatta ed orientabile è omeomorfa a una sfera con g manici o anche a un toro con g buchi. Il numero g dicesi genere della superficie (fig. 5).

La superficie di Riemann Σ di una curva algebrica proiettiva essendo una superficie connessa, compatta ed orientabile possiede genere ben definito. Tale invariante topologico è fondamentale per comprendere i fenomeni di periodicità posseduti dagli integrali abeliani. Lo si può calcolare a partire da una qualunque presentazione di Σ come rivestimento ramificato di $\bar{\mathbf{C}}$.

L'introduzione del genere pone subito il difficile problema di classificare le

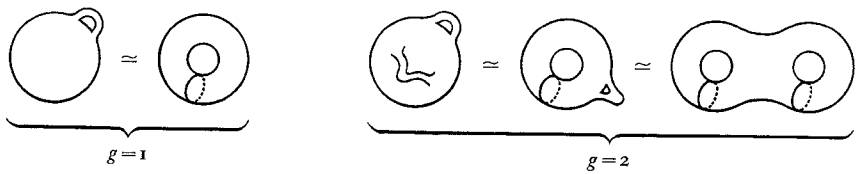


Figura 5.
Genere di una superficie.

superfici di Riemann compatte che hanno ugual genere (problema dei moduli).

3) Una superficie di Riemann compatta Σ è, come s'è detto, un substrato geometrico-topologico naturale quanto $\mathbf{C}$. È dunque logico sviluppare la teoria delle funzioni analitiche (con singolarità) su Σ. Poiché Σ è compatta, le sole funzioni che siano ovunque olomorfe su Σ sono le costanti. Quanto alle funzioni meromorfe, esse sono necessariamente razionali cioè funzioni razionali di z e di w per ogni coppia (z, w) che definisce Σ come curva algebrica. Ciò significa che il corpo K delle funzioni meromorfe su Σ è il corpo $\mathbf{C}(z, w)$ generato su $\mathbf{C}$ da z e w. Ma poiché w è funzione algebrica di z, K è un'estensione algebrica di grado finito del corpo $\mathbf{C}(z)$ avente grado di trascendenza 1 su $\mathbf{C}$. Reciprocamente, dato un tale corpo K, esso è il corpo delle funzioni meromorfe sulla superficie di Riemann della curva algebrica d'equazione $P(z, w)=0$ ove w è un generatore di K su $\mathbf{C}(z)$ e P il suo polinomio irriducibile. Si possono dunque considerare equivalenti due curve algebriche i cui corpi di funzioni meromorfe sono isomorfi. Tale è il punto di partenza della geometria birazionale. A meno di equivalenza birazionale la teoria delle curve algebriche s'identifica dunque con quella delle estensioni algebriche finite del corpo di base $\mathbf{C}(z)$. Si tratta di un punto decisivo poiché, come è stato mostrato da Dedekind e Weber, questa teoria è essenzialmente analoga a quella delle estensioni algebriche finite del corpo primo $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali, cioè alla teoria dei numeri algebrici. Appare cosí un profondo nesso tra geometria ed aritmetica e nasce una teoria geometrico-aritmetica dei corpi globali (estensioni algebriche finite di $\mathbf{Q}$ o di $\mathbf{C}(z)$) che piú tardi sarà collegata ad una teoria dei corpi locali. Lo sviluppo di tale sintesi è la base della geometria algebrica astratta.

4) Poiché una superficie di Riemann Σ è un substrato geometrico-topologico naturale, vi si può sviluppare una teoria dell'integrazione. È tale punto di vista quello che conduce ai risultati piú ricchi. Si considerino dunque le forme differenziali su Σ (cfr. l'articolo «Differenziale» in questa stessa *Enciclopedia*) e dapprima le forme differenziali a coefficienti differenziabili. Siano (x, y) coordinate reali locali di Σ (come superficie differenziabile). Le 0-forme sono le funzioni differenziabili $f : \Sigma \to \mathbf{R}$ oppure $f : \Sigma \to \mathbf{C}$. Le n-forme sono nulle per $n>2$ (poiché Σ ha dimensione 2). Le 2-forme sono le densità $f(x, y)\, dx\, dy$, ove f è una funzione differenziabile, e quanto alle 1-forme (le piú interessanti) esse sono del tipo $\omega = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy$ ove $a(x, y)$ e $b(x, y)$ sono funzioni differenziabili. Tra le 1-forme a valori complessi, vi sono le 1-forme olomorfe (rispettivamente meromorfe) del tipo $\omega = a(z)\, dz$, ove $a(z)$ è una funzione olomorfa (rispettivamente meromorfa) su Σ. Esse formano ovviamente uno spazio vettoriale su $\mathbf{C}$.

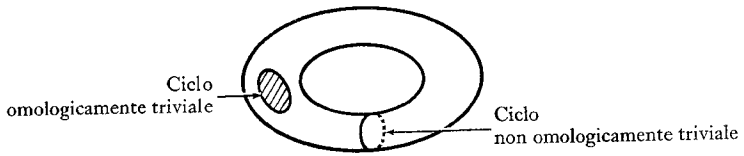


Figura 6.
Non trivialità dell'omologia del toro ($g=1$).

Uno dei primi grandi risultati di Riemann è che, se le funzioni olomorfe su Σ sono costanti (si suppone naturalmente che Σ sia compatta), non altrettanto accade per le 1-forme olomorfe (dette di prima specie) e questo per ragioni dovute al vincolo esercitato dal livello topologico sul livello analitico-algebrico.

Piú precisamente, sia Σ di genere $g \neq 0$. La sua omotopia e la sua omologia sono allora non triviali. Esistono su Σ dei cappi omotopicamente non triviali che non si possono contrarre a un punto entro Σ, ovvero esistono dei cicli omologicamente non triviali (fig. 6) che non sono bordo di alcun disco di Σ. Σ dicesi non semplicemente connessa.

Bisogna notare che tale difetto di connessione semplice non dipende qui da cause locali (come ad esempio nel caso del piano bucato) ma da cause globali.

È facile vedere che, poiché Σ è di genere g, esistono $2g$ cicli omologicamente non triviali «indipendenti» (cioè tali che ogni ciclo omologicamente non triviale possa scriversi in modo unico come una loro combinazione) e che possono essere scelti come g coppie disgiunte $(\gamma_1, \delta_1)\ldots(\gamma_g, \delta_g)$ di cicli «coniugati» (fig. 7) che generalizzano le nozioni di «paralleli» e «meridiani» del toro.

Tagliando Σ lungo una tale base di cicli si ottiene una superficie (con bordo) semplicemente connessa.

Si può allora far vedere che ad ogni coppia (γ_i, δ_i) d'una tale base di cicli si può associare una 1-forma olomorfa ω_i in modo da soddisfare il seguente

TEOREMA (Riemann). *Le 1-forme olomorfe $\omega_1, \ldots, \omega_g$ formano una base del $\mathbf{C}$-spazio vettoriale delle 1-forme olomorfe (cioè di prima specie).*

5) Le 1-forme sono fatte per essere integrate lungo cammini di Σ e definiscono per integrazione delle primitive. Il problema è di sapere se tali primitive sono uniformi su Σ. Sia 0 un punto base di Σ. Sia ω una 1-forma olomorfa o meromorfa. Per definire il valore in un punto a della primitiva F di ω, si considera un cammino γ che va da 0 ad a e si pone $F(a) = \int_\gamma \omega$. Perché F sia uniforme in a, occorre e basta che l'integrale $\int_\gamma \omega$ *non dipenda* dal cammino γ scelto tra 0 ed a. Se γ_1 e γ_2 sono due tali cammini e γ il ciclo $\gamma_1 - \gamma_2$, la condizione necessaria e sufficiente d'uniformità in a è pertanto $\int_\gamma \omega = 0$ e la condizione necessaria e sufficiente d'uniformità globale è $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni ciclo γ.

Si può dedurre da tale condizione che esistono essenzialmente due tipi di

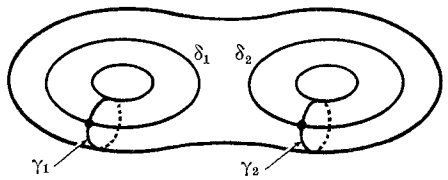


Figura 7.
Base di cicli coniugati del doppio toro ($g=2$).

ostruzione all'uniformità delle primitive, l'uno locale e l'altro globale. Si consideri dapprima quello locale. Sia $\omega = a(z)\,dz$ e $\sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ lo sviluppo di Laurent (che generalizza lo sviluppo di Taylor) nell'intorno di un polo z_0 di ω. Nell'intorno di z_0, F si ottiene integrando la serie di Laurent termine a termine. Se $n \neq -1$, l'integrazione di $(z-z_0)^n$ dà $(z-z_0)^{n+1}/(n+1)$ che è uniforme. Se però $n=-1$, l'integrazione di $(z-z_0)^{-1}$ dà $\log(z-z_0)$ che è una funzione multiforme. Infatti il logaritmo d'un numero complesso $z = \rho e^{i\vartheta}$ è dato dalla formula

$$\log z = \log \rho + i(\vartheta + 2K\pi), \tag{9}$$

ove $K \in \mathbf{Z}$. Tale ostruzione locale all'uniformità s'esprime attraverso la nozione intrinseca di residuo. Il residuo di ω in uno dei suoi poli z_0 è il coefficiente a_{-1} che ha un significato indipendente dalla scelta della coordinata locale z ed è dato dalla formula

$$a_{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \omega, \tag{10}$$

ove γ è un «piccolo» ciclo (orientato positivamente) attorno a z_0 («piccolo» significa che γ è contenuto in un intorno semplicemente connesso di z_0). Se ω ammette residui non nulli v'è ostruzione locale all'uniformità della sua primitiva F, poiché F presenterà singolarità logaritmiche.

Si noti a questo proposito uno degli aspetti cruciali della solidarietà locale/globale.

TEOREMA DEI RESIDUI. *La somma dei residui di una 1-forma meromorfa su di una superficie di Riemann compatta Σ è sempre nulla.*

Applicando tale teorema alla 1-forma $[f'(z)\,dz]/[f(z)-c]$ si mostra facilmente che una funzione f meromorfa su Σ prende esattamente lo stesso numero di volte ogni valore $c \in \bar{\mathbf{C}}$. In particolare il numero di poli di f (contati con la loro molteplicità) è uguale al numero dei suoi zeri (contati con la loro molteplicità).

Venendo ora al problema dell'ostruzione globale all'uniformità, si eliminano dapprima le ostruzioni locali considerando soltanto le 1-forme meromorfe prive di residui. Si dimostra che questa condizione locale dipende dal livello differenziabile e si esprime affermando che il differenziale $d\omega$ di ω è la 2-forma nulla. Tali 1-forme diconsi chiuse e si chiamano esatte le 1-forme chiuse particolari che sono i differenziali $\omega = df$ di 0-forme (cioè la cui primitiva è uniforme). Le forme esatte sono chiuse poiché $d^2 = 0$. Le 1-forme chiuse sono dunque le 1-forme localmente esatte.

Il primo risultato è che l'integrale $\int_\gamma \omega$ di una 1-forma chiusa ω su un ciclo γ dipende solo dalla classe d'omologia di γ ed è dunque nullo se γ è il bordo di un disco di Σ. L'ostruzione globale all'uniformità delle primitive delle 1-forme chiuse proviene dunque essenzialmente dal fatto che l'omologia di Σ è non triviale, cioè il suo genere non è nullo. Se γ è un ciclo che non è un bordo, l'integrale $\int_\gamma \omega$ si chiama un periodo di ω. Si ha il seguente teorema:

TEOREMA. *Una 1-forma chiusa ω è esatta se e solo se $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni ciclo γ, cioè se e solo se tutti i suoi periodi sono nulli.*

In generale si possono considerare i funzionali lineari I che associano a un ciclo γ un numero complesso $I(\gamma)$ che dipende linearmente da γ. Diconsi chiusi i funzionali che si annullano sui bordi. Questi sono le forme lineari sullo spazio vettoriale H_1 quoziente dello spazio dei cicli per lo spazio dei bordi. Il loro spazio H^1 è dunque il duale di H_1 (cfr. l'articolo «Dualità» in questa stessa *Enciclopedia*). Di qui il nome di spazio di coomologia attribuito ad H^1.

La teoria coomologica delle 1-forme permette di risolvere concettualmente il problema degli *integrali abeliani* ed in particolare ellittici (si tratta del problema inizialmente considerato da Riemann. Cfr. gli articoli «Invariante», § 12, e «Funzioni», § 7, in questa stessa *Enciclopedia*).

6) Come si è già notato, le primitive delle 1-forme su una superficie di Riemann Σ possono essere multiformi. Si possono però rendere uniformi sul *rivestimento universale* $\tilde{\Sigma}$ di Σ. Tale nozione di rivestimento è al centro della topologia algebrica. Data una superficie astratta Σ (connessa) si chiama rivestimento (non ramificato) di Σ una superficie Σ' munita di una proiezione $\pi : \Sigma' \to \Sigma$ che è un omeomorfismo locale di fibra discreta. Ciò significa che l'immagine inversa mediante π di un aperto abbastanza piccolo Δ di Σ è una «pila» di aperti di Σ' omeomorfi a Δ. Il caso banale è quello in cui Σ' è globalmente una «pila» di esemplari di Σ, cioè il prodotto diretto di Σ per una fibra discreta. Σ' è allora non connessa. Il caso non banale è quello in cui Σ' è connessa. Per esempio identificando le coppie di punti antipodali di una sfera S^2 si fa di S^2 un rivestimento connesso a due fogli del piano proiettivo reale.

La teoria dei rivestimenti fornisce un ottimo esempio di unità della matematica, cioè d'isomorfismo tra teorie i cui domini di oggetti sono molto diversi. Essa è infatti formalmente identica alla teoria di Galois delle estensioni algebriche dei corpi.

Riprendendo in esame le superfici di Riemann, esse possiedono rivestimenti che sono ancora superfici di Riemann. Peraltro esiste un teorema di classificazione delle superfici di Riemann semplicemente connesse.

TEOREMA (Koebe). *Ogni superficie di Riemann semplicemente connessa è analiticamente isomorfa alla sfera di Riemann $\bar{\mathbf{C}}$ (cioè alla retta proiettiva complessa $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$), oppure al piano complesso $\mathbf{C}$, oppure all'interno Δ del disco unità di $\mathbf{C}$.*

Osservazione: La struttura analitica di Δ ne fa un modello del piano iperbolico (cfr. § 2.1). A ciò è dovuto il fatto che la geometria iperbolica è rientrata nell'universo standard di ogni matematico.

Perciò ogni superficie di Riemann si ottiene come quoziente di $\bar{\mathbf{C}}$, $\mathbf{C}$ oppure Δ rispetto a un gruppo di automorfismi della loro struttura analitica. In particolare è questo il caso per le superfici di Riemann compatte. Il genere 0 corrisponde a $\bar{\mathbf{C}}$, il genere 1 (curve ellittiche) ai quozienti di $\mathbf{C}$ rispetto a dei reticoli, i generi $g > 1$ a quozienti di Δ rispetto a gruppi (discreti) di automorfismi della sua struttura iperbolica (gruppi fuchsiani). Se allora si considera una 1-forma

ω su una superficie di Riemann compatta Σ, e se si suppone che sia chiusa, cioè che l'ostruzione all'uniformità della sua primitiva F sia globale e provenga dall'omologia non triviale di Σ, tale ostruzione scompare allorché si risale a $\tilde{\Sigma}$. Calcolata in $\tilde{\Sigma}$, la primitiva $\tilde{F}$ di ω diventa globalmente uniforme. Dire che F è già uniforme su Σ è quanto dire che i suoi periodi sono nulli.

Osservazione: Si è visto che nella concezione riemanniana z poteva essere considerata solo localmente come una variabile indipendente e che globalmente z era in effetti la proiezione d'un rivestimento ramificato $z : \Sigma \to \bar{\mathbf{C}}$. Si può dire ora che $\tilde{\Sigma}$ è il luogo ove z ritorna ad essere globalmente una variabile indipendente.

Per concludere la rapida rassegna dello straordinario rimescolamento di idee e di risultati generati dall'introduzione (da parte di Riemann) della dialettica locale/globale nella teoria delle funzioni analitiche, andrebbe ancora ricordato il celeberrimo teorema di Riemann-Roch per il quale si rimanda agli articoli «Geometria e topologia» e «Invariante» in questa stessa *Enciclopedia*.

La generalizzazione di tale sintesi in dimensione superiore si è rivelata irta di difficoltà (teoria delle superfici algebriche prima, degli insiemi algebrici poi) e ha rappresentato la punta avanzata di tutta la geometria algebrica contemporanea.

Può allora sembrare che l'assenza di solidarietà locale/globale nel caso differenziabile tolga ogni speranza di stabilire in tal caso una sintesi di cosí vasta portata teorica e concettuale. Ma si vedrà che ciò è completamente falso e che la topologia differenziale moderna conduce a una nuova dialettica del locale e del globale che, pur essendo molto diversa da quella cui è stato fin qui accennato, non è meno armoniosa ed elegante.

4. *L'opposizione locale/globale nella teoria delle funzioni: il caso differenziabile.*

4.1. Il paradigma catastrofista.

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$ di una variabile reale a valori reali. Si è visto al § 3.1 che se essa non è analitica non sussiste alcuna solidarietà globale delle sue determinazioni locali. In modo intuitivo si può dire che la sua consistenza «non si traduce in formule»: non esiste espressione simbolica (algoritmo) che permetta di calcolare f. Naturalmente i metodi del tipo sviluppo di f in serie di Fourier permettono di approssimare f. Ma ciò non scioglie il nodo «filosofico» consistente nel fatto che l'identità di f è ideale (non costruibile). Si può dunque subito ipotizzare che il principio d'identità concreto proprio di f sia qualitativo, cioè strettamente piú debole del principio d'identità classico e deve dunque essere definito come una relazione d'equivalenza (che verrà indicata con $\sim$) sullo spazio $\mathcal{F}$ delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Bisogna perciò concettualizzare quest'equivalenza che deve essere naturale.

Si consideri il grafico di f. Si tratta di una curva C_f del piano $\mathbf{R}^2$. Si vuole che le funzioni f e g rappresentate nella figura 8 siano equivalenti. Cosa c'è di comune tra f e g? Qual è il dato qualitativamente invariante che determina fenomenologicamente l'equivalenza $f \sim g$?

Il lettore intuirà facilmente che tale dato si riduce all'informazione finita e locale che costituisce la «configurazione critica» di f, cioè:

a) il numero dei punti critici di f (ossia dei punti a tangente orizzontale di C_f) e il loro tipo (massimo o minimo). Nell'esempio considerato, due minimi m_1 e m_2 e un massimo M_1;
b) l'ordine $m_1 < M_1 < m_2$ di questi punti critici;
c) l'ordine $f(m_1) < f(m_2) < f(M_1)$ dei valori critici corrispondenti.

In base a una tale configurazione critica esiste un solo modo di ricostruire f a meno di equivalenze: la configurazione critica di f determina il suo tipo qualitativo globale (fig. 9).

Certo, questa intuizione di cui il lettore dovrebbe fidarsi s'imbatte subito – come del resto ogni intuizione – in notevoli difficoltà. I punti critici di f possono infatti essere piú complicati che non dei semplici massimi o minimi (possono essere degeneri: cfr. oltre). Nonostante tutto, tale intuizione radicata nella fenomenologia della percezione è originaria per un nuovo tipo di dialettica tra locale e globale, il quale è matematizzabile e spalanca un vero e proprio universo.

Verrà dapprima mostrato che la nozione di tipo qualitativo introdotta in modo intuitivo corrisponde infatti esattamente al principio naturale d'identità, che tiene conto dei seguenti fatti: *a*) f è un'applicazione tra uno spazio sorgente e uno spazio bersaglio; *b*) il livello di struttura che si considera è quello differenziabile.

Il punto *a*) può essere abbordato in un contesto generale (in qualche misura è universale). Sia C la categoria (cfr. l'articolo «Applicazioni» in questa stessa *Enciclopedia*) degli insiemi muniti di un certo tipo di struttura. Sia $\mathrm{Hom}(M, N)$ l'insieme dei morfismi $f : M \to N$ tra due oggetti M ed N di C, ossia l'insieme delle trasformazioni che rispettano la loro struttura. Quale sarà l'identità strutturale, cioè il grado di discernibilità di un elemento $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$? Essa deve

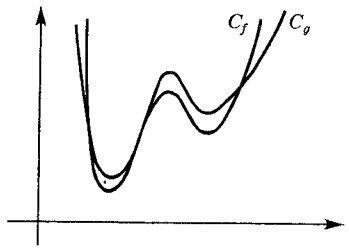


Figura 8.
Equivalenza qualitativa di due funzioni.

«corrispondere» al grado di discernibilità degli elementi della sorgente (M) e del bersaglio (N) di f. Orbene, l'indiscernibilità degli elementi di un oggetto X di C è misurata dalle «simmetrie interne» di X, ossia dal gruppo degli automorfismi di X, o in altri termini dal gruppo delle permutazioni di X che lasciano invariato l'insieme delle interrelazioni strutturali tra gli elementi di X. Si arriva dunque in modo naturale alla seguente definizione. Sia G_M (rispettivamente G_N) il gruppo degli automorfismi di M (rispettivamente di N). Il prodotto diretto $G = G_M \times G_N$ opera in $\mathrm{Hom}(M, N)$ e definisce in esso delle classi d'equivalenza.

DEFINIZIONE. *Siano f e g due elementi di $Hom(M, N)$. f e g sono equivalenti ($f \sim g$) se esistono un automorfismo $\varphi \in G_N$ e un automorfismo $\psi \in G_M$ tali che il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

sia commutativo, cioè tale che $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Passando allora al punto b), poiché il livello di struttura considerato è quello differenziabile, si devono considerare il gruppo Diff **R** dei diffeomorfismi di **R** (cioè degli automorfismi della struttura differenziabile di **R**) e l'azione di $G = \mathrm{Diff}\,\mathbf{R} \times \mathrm{Diff}\,\mathbf{R}$ sullo spazio $\mathfrak{F}$ delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ di **R** in **R**: $f, g \in \mathfrak{F}$ saranno equivalenti se esistono $\varphi, \psi \in \mathrm{Diff}\,\mathbf{R}$ tali che $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Orbene, è facile vedere che ciò che è comune a una classe d'equivalenza, o in altre parole ciò che è invariante rispetto all'azione di G, è esattamente la configurazione critica delle funzioni. Piú precisamente, se x_0 è un punto critico di f, la serie di Taylor $T_{x_0}f$ di f in x_0 inizia (a parte il termine costante $f(x_0)$) con un termine $(x - x_0)^n [f^n(x_0)/n!]$. L'intero n dicesi ordine del punto critico. I diffeomorfismi mantengono l'ordine dei punti critici e il segno di $f^n(x_0)$ (cioè la qualità di minimo, di massimo o di punto di flesso anche degenere) come anche l'ordine rispettivo dei punti critici e dei valori critici.

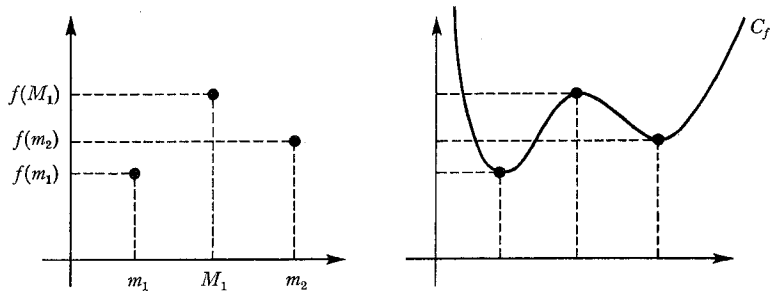


Figura 9.
La configurazione critica di f determina globalmente il suo tipo qualitativo.

Osservazione: Ciò che s'è detto vale solo per quei diffeomorfismi di **R** che si ottengono per deformazione dell'applicazione identica di **R**. Se si accettano i diffeomorfismi di **R** ottenuti per deformazione della simmetria $x \to -x$, viene globalmente invertito sia l'ordine dei punti critici, sia quello dei valori critici, sia entrambi. L'essenziale è però che un diffeomorfismo non può invertire tali ordini parzialmente e passare per esempio dall'ordine $m_1 < M_1 < m_2 < M_2$ all'ordine $m_1 < M_2 < m_2 < M_1$.

Ciò ch'è stato dunque battezzato il tipo qualitativo di f è semplicemente il suo tipo differenziabile. Questa nozione cruciale chiarisce e riduce in maniera sostanziale lo scarto, di cui al § 3.1, tra la struttura locale di una funzione differenziabile e il suo sviluppo di Taylor. Sia $f \in \mathfrak{F}$. I troncamenti successivi di $T_{x_0}f$ che esprimono la migliore successione di approssimazioni locali di f mediante polinomi diconsi *getti* di f in x_0. Sebbene $T_{x_0}f$ non rappresenti f in x_0, può ragionevolmente avvenire che f sia localmente equivalente ad uno dei suoi getti. In tal caso si afferma che f è di determinazione finita in x_0. Se per esempio $f'(x_0) \neq 0$, si può dimostrare che f è determinata dell'ordine 1 in x_0: mediante un cambiamento differenziabile di coordinate, f si scrive in un intorno di x_0 nella forma $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$. Analogamente, se x_0 è un punto critico d'ordine 2 (punto critico non degenere), f è determinata dell'ordine 2 in x_0: mediante un cambiamento differenziabile di coordinate f si scrive in un intorno di x_0 nella forma $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^2 [f''(x_0)/2]$.

La nozione di determinazione finita, che può essere generalizzata, è programmatica. Nel caso differenziabile si cerca di «trasferire» nei cambiamenti di coordinate lo scarto tra il differenziabile e l'analitico-algebrico e si analizza «ciò che resta» dopo tale passaggio. Nei casi favorevoli, ciò che resta è algebrico e permette dunque il calcolo. Ecco uno dei tanti esempi. Sia X un campo di vettori $\mathcal{C}^\infty$ su una varietà differenziabile M. Ciò significa che ad ogni punto x di M si associa un vettore $X(x)$ tangente ad M in x e che varia in modo differenziabile al variare di x. Dato un punto O di M, si vuol sapere se, a meno di equivalenze, X è localmente di forma semplice in O. Se $X(O) \neq 0$, il classico teorema d'esistenza delle soluzioni di un'equazione differenziale del prim'ordine afferma che X è equivalente nell'intorno di O ad un campo costante. Se $X(O) = 0$, cioè se O è un punto singolare del campo X, si tratta di sapere sotto quali condizioni X è localmente determinato dal proprio getto d'ordine 1 ossia equivalente al campo lineare $\tilde{X}$ di coordinate

$$\tilde{X}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(O)\, x_j$$

(ove $(x_1, \ldots, x_n)$ sono coordinate locali di M in O ed X_i le coordinate di X). In tal caso si dirà che X è linearizzabile (in O). Sia A la matrice $n \times n$

$$A = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(O)\right).$$

È facile dimostrare che i suoi autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono degli invarianti del tipo differenziabile di X. Si ha allora il seguente risultato:

TEOREMA DI POINCARÉ-STERNBERG. *Se per ogni n-pla* $(i_1, \ldots, i_n)$ *d'interi tali che* $i_1 + \ldots + i_n \geq 2$, *e se per ogni* $j \in (1, \ldots, n)$ *si ha* $\lambda_j - \sum_{k=1}^{n} i_k \lambda_k \neq 0$, *allora* X *è linearizzabile (in* O*).*

[Per la dimostrazione di tale teorema e delle sue conseguenze ci si può riferire a Roussarie 1975].

Ma si può andare ben piú lontano. Lo spazio $\mathfrak{F}$ è infatti munito d'una topologia, detta topologia $\mathcal{C}^\infty$, adattata al livello differenziabile, ossia la topologia della convergenza uniforme di f e di tutte le sue derivate sui compatti di $\mathbf{R}$. Orbene dal momento in cui si dispone su un insieme di una topologia e di una relazione d'equivalenza è possibile definirvi una nozione di stabilità strutturale.

DEFINIZIONE. *Si dice che* $f \in \mathfrak{F}$ *è strutturalmente stabile se esiste un intorno di* f *per la topologia di* $\mathfrak{F}$, *tutti gli elementi del quale sono equivalenti ad* f.

In altri termini, f è strutturalmente stabile se il suo tipo qualitativo «resiste» a piccole deformazioni.

Sia allora K l'insieme degli elementi di $\mathfrak{F}$ strutturalmente instabili. K dicesi l'insieme di biforcazione (o l'insieme catastrofico) globale di $\mathfrak{F}$. Qui s'introduce una nuova idea chiave: K è un sottospazio discriminante che classifica i tipi qualitativi stabili degli elementi di $\mathfrak{F}$. È in effetti intuitivo che se si vuole passare da un tipo stabile a un altro, il principio di continuità esige a priori che si passi per un tipo instabile intermedio, cioè che si attraversi K: K decompone $\mathfrak{F} \setminus K$ in «cellule» aventi per bordo K ed associate ai tipi stabili. Almeno nei casi semplici, K avrà una geometria relativamente tipica. Il problema sarà dunque di vedere in qual misura la decomposizione di $\mathfrak{F}$ in orbite di G (cioè in classi d'equivalenza) può «leggersi» sulla geometria di K (che è evidentemente G-invariante). Cosí nasce un nuovo paradigma, il paradigma catastrofista, che da una parte riposa sullo stato globale «eccitato» (nel senso del § 1) dell'universo matematico costituito dalla topologia differenziale moderna e dalla teoria delle singolarità, dall'altra dà adito a una fusione totalmente nuova dei principî della filosofia naturale (cfr. l'articolo «Catastrofi» in questa stessa *Enciclopedia*). La forza di tale paradigma proviene dal fatto che offre la prima interpretazione matematica globale e coerente di un fenomeno universale che la scienza classica ha sempre tentato di rifiutare e che la filosofia, al contrario, ha sempre fatto di tutto per conservare, cioè quello della trasformazione delle forme.

Se ne indicherà ora qualche aspetto.

4.2. Stabilità e trasversalità.

Un primo problema è quello di trovare dei criteri intrinseci e geometrici che caratterizzino la stabilità strutturale definita per ora in modo puramente «esterno» rispetto a uno spazio globale $\mathfrak{F}$. Si riprenderà il caso in cui $\mathfrak{F}$ è uno spazio di funzioni differenziabili $f : M \to \mathbf{R}$ di una varietà differenziabile M nella retta reale (teoria di Morse). Si accennerà invece qui a un problema risolto da Whitney che dà origine al «programma di Thom-Smale» sullo studio delle singolarità delle applicazioni differenziabili (per i legami con la struttura di M cfr. oltre, p. 472).

Si analizzino ora dal punto di vista «fenomenologico», ossia qualitativo, le applicazioni differenziabili $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ del piano in sé. Una tale f associa a un punto $x = (x_1, x_2)$ di $\mathbf{R}^2$ un punto $f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ di $\mathbf{R}^2$. Localmente due casi sono possibili: f è un diffeomorfismo oppure f non lo è. Nel primo caso la jacobiana $\mathcal{J}(x)$ di f in x, cioè la matrice 2×2: $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$ $(i, j = 1, 2)$, matrice dell'applicazione tangente $D_x f : T_x\mathbf{R}^2 \to T_{f(x)}\mathbf{R}^2$ di f in x (cfr. l'articolo «Differenziale» in questa stessa *Enciclopedia*), è invertibile, cioè a determinante non nullo. Si dice allora che x è un punto regolare di f. Se x è regolare, f è localmente equivalente all'applicazione identica $\mathrm{Id} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ed è dunque in un certo senso localmente banale. L'«informazione» che caratterizza fenomenologicamente f non può dunque provenire che dai punti in cui f non è un diffeomorfismo locale, cioè dai punti in cui la jacobiana *non è* invertibile. Tali punti diconsi punti singolari o punti critici di f. Si ritrova dunque, in un piú largo contesto, l'idea di «configurazione critica». Ma la struttura singolare di f può essere estremamente complicata e può percorrere tutti gli stadi che vanno dalle applicazioni massimamente singolari quali le funzioni costanti alle applicazioni ovunque regolari quali i diffeomorfismi globali del piano. La grande idea dovuta a Whitney è

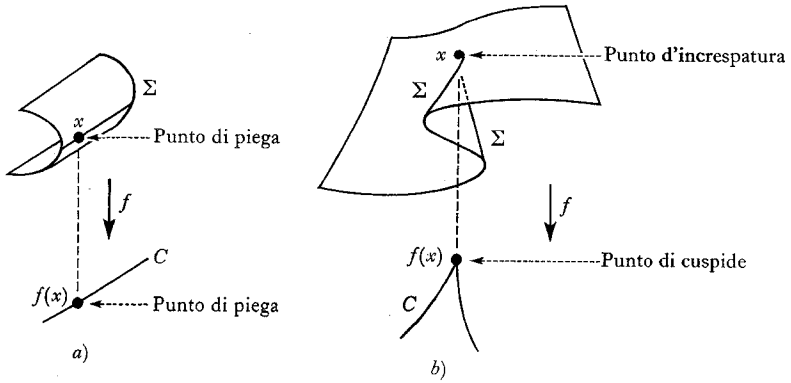


Figura 10.
I due modelli canonici del teorema di Whitney: *a*) piega, *b*) increspatura.

allora quella di limitarsi alle applicazioni strutturalmente stabili e di dimostrare che il vincolo di stabilità è abbastanza forte per classificare le possibili singolarità di f.

TEOREMA DI WHITNEY. *Se f è un'applicazione differenziabile strutturalmente stabile del piano nel piano:*

a) il luogo critico di f (cioè l'insieme dei punti critici di f) è una curva regolare Σ (eventualmente vuota) di $\mathbf{R}^2$;
b) l'immagine di Σ mediante f è una curva C di $\mathbf{R}^2$ che ammette come sole singolarità possibili punti di regresso isolati γ_i;
c) se x è un punto di Σ la cui immagine $f(x)$ appartiene a $C-\{\gamma_i\}$, f è localmente equivalente in x al modello canonico $(x_1, x_2)\to(x_1, x_2^2)$;
d) se x è un punto di Σ la cui immagine è uno dei γ_i, f è localmente equivalente in x al modello canonico $(x_1, x_2)\to(x_1, -x_1x_2+x_2^3)$.

È abbastanza facile visualizzare i modelli canonici *c*) e *d*) di tale teorema. Basta «storcere» la sorgente $\mathbf{R}^2$ (supposta immersa in $\mathbf{R}^3$) in modo che f diventi una proiezione. Nel primo caso si ottiene una catastrofe detta catastrofe piega e nel secondo una catastrofe detta catastrofe cuspide o catastrofe increspatura (fig. 10).

Il contenuto e il valore del teorema di Whitney si chiariscono nell'ambito dei getti (cfr. l'articolo «Geometria e topologia», p. 684, in questa stessa *Enciclopedia*). L'idea fondamentale è allora che la stabilità di f s'esprime mediante proprietà di trasversalità (*ibid.*, p. 683) delle immagini $j^kf(\mathbf{R}^2)$ rispetto a certi sottospazi degli spazi di getti $\mathcal{J}^k(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$.

Ciò che può essere battezzato «programma di Thom» consiste nel generalizzare l'analisi fin qui vista alle applicazioni differenziabili tra varietà arbitrarie e nel cercare modelli canonici per le singolarità stabili (generalizzazione dei punti *c*) e *d*) del teorema di Whitney). Gli strumenti algebrici fondamentali sono costituiti dal teorema di preparazione di Malgrange e dalla teoria della stabilità di Mather [tali argomenti si trovano esposti per esempio in Golubitsky e Guillemin 1973 e Poenaru 1974].

4.3. Genericità della stabilità.

Dopo aver studiato certi criteri intrinseci di stabilità strutturale, è naturale domandarsi se tale proprietà soddisfa l'esigenza intuitiva secondo la quale ogni forma instabile può essere stabilizzata mediante piccole deformazioni. Si sa già che, per definizione, la stabilità strutturale è una proprietà aperta. Si tratta ora di sapere se è una proprietà *densa*. Questo problema è importante per il fatto che la non-densità può indicare dei limiti essenziali al concetto di stabilità.

Questo problema è dominato da una parte da una proprietà topologica generale degli spazi funzionali che intervengono in questo tipo di riflessione, proprietà secondo la quale un'intersezione numerabile di aperti densi è un sottoinsieme denso (detto residuale) e dall'altra dal teorema di trasversalità di Thom, secondo cui generalmente le proprietà di trasversalità sono generiche (se si chiama generica una proprietà soddisfatta su un insieme residuale) (cfr. il citato articolo «Geometria e topologia», p. 685).

Ecco due estreme conseguenze di questo fondamentale teorema. Si consideri dapprima il caso di applicazioni differenziabili $f: M\to\mathbf{R}$. Sia n la dimensione di M e $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un sistema di coordinate locali in $x\in M$. Sia x un punto critico, cioè $\partial f/\partial x_1=\ldots=\partial f/\partial x_n=0$ in x (tale proprietà è intrinseca, ossia non dipende dal sistema di coordinate scelto). Si consideri la matrice simmetrica delle derivate seconde di f in x, detta hessiana di f in x,

$$H(x)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x)\right).$$

Si dice che x è un punto critico non degenere di f se $H(x)$ ha rango massimo n.

TEOREMA. *Genericamente i punti critici di un'applicazione $f: M\to\mathbf{R}$ sono non degeneri ed isolati.*

Dimostrazione: Localmente $\mathcal{J}^1(M, \mathbf{R})$ ha coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ per M, y per $\mathbf{R}$ e $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ per la fibra. Sia S_1 il sottospazio di $\mathcal{J}^1(M, \mathbf{R})$ degli 1-getti $(x_1, \ldots, x_n, y, 0, \ldots, 0)$, x è punto critico se e solo se $j^1f(x)\in S_1$.

LEMMA. *x è non degenere se e solo se j^1f è trasverso in x ad S_1.*

Dimostrazione: j^1f è l'applicazione (differenziabile) che associa al punto $(x_1, \ldots, x_n)$ di M il punto

$$\left(x_1, \ldots, x_n, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

di $\mathcal{J}^1(M, \mathbf{R})$. La sua jacobiana in x è dunque la matrice a $2n+1$ righe ed n colonne:

$$\mathcal{J}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Se $u=(u_1, \ldots, u_n)$ è un vettore tangente ad M in x, la sua immagine mediante l'applicazione tangente a j^1f è dunque il vettore di coordinate:

$$\left(u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial f}{\partial x_1}u_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}u_n, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}u_1+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}u_n, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}u_1+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}u_n\right)=$$

$$=\left(u, \frac{\partial f}{\partial x_1}u_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}u_n, Hu\right).$$

Se x è critico, dire che j^1f è trasverso in x ad S_1 significa che si possono ottenere in tal modo tutti i vettori $(u, 0, w)$. Ma ciò significa precisamente che l'equazione $Hu=w$ è risolubile per ogni vettore w e dunque che H è invertibile, ossia di rango massimo in x.

Dato questo lemma, la prima parte del teorema è una conseguenza diretta del teorema di trasversalità. Quanto alla seconda, essa discende dal fatto che poiché S_1 ha codimensione n, se j^1f è trasversa ad S^1, $j^1f^{-1}(S_1)$ è anche di codimensione n e dunque di dimensione 0.

Osservazione: Se x è un punto critico di f, $f(x)$ dicesi valore critico di f. Si fa vedere con metodi analoghi che genericamente i valori critici sono distinti.

Si consideri ora il caso delle applicazioni differenziabili $f: M \to N$ ove N, invece di essere di dimensione piccola come $\mathbf{R}$, è di dimensione «grande» rispetto a quella di M. Si può sperare che esisteranno sufficienti gradi di libertà affinché: *a*) f diventi genericamente un'immersione, ossia che in ogni punto di M l'applicazione tangente di f sia iniettiva (questa è una nozione locale); *b*) f diventi un'immersione iniettiva, od anche un'immersione regolare (*embedding*) (questa è una nozione globale).

Tale è ad esempio il contenuto del seguente teorema di Whitney che può essere ottenuto come corollario del teorema di trasversalità:

TEOREMA DI IMMERSIONE (Whitney). *Se dim $N \geq 2$ dim M, le applicazioni differenziabili di M in N sono genericamente delle immersioni.*

Analogamente si dimostra che se dim $N \geq 2$ dim $M+1$ le applicazioni differenziabili $f: M \to N$ sono genericamente immersioni iniettive. Ciò non vuol dire tuttavia che f sia un'immersione regolare poiché l'immagine $f(M)$ di M mediante f può essere talmente «ripiegata» su se stessa in N che la topologia indotta su $f(M)$ da quella di N può non essere omeomorfa a quella di M. Si può però dimostrare che se f è un'immersione iniettiva *propria* (cioè se l'immagine inversa mediante f di ogni compatto di N è un compatto di M), allora f è necessariamente un'immersione regolare. Se esistono dunque delle applicazioni proprie di M in N, il teorema di Whitney garantisce l'esistenza di immersioni regolari di M in N.

Ecco infine il risultato, completo e notevole, sulla densità delle applicazioni stabili.

TEOREMA DI MATHER. *Le applicazioni strutturalmente stabili di una varietà di dimensione n in una varietà di dimensione p sono dense se e solo se*

a) $p \geq n+4$ e $p<7(p-n)+8$
b) $0 \leq p-n \leq 3$ e $p<7(p-n)+9$
c) $p=n-1$ e $p<8$
d) $p=n-2$ e $p<6$
e) $p \leq n-3$ e $p<7$.

In particolare per $p=1$ (caso $f: M \to \mathbf{R}$), $n=2$ e $p=2$ (caso $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$), $p \geq 2n$ (caso delle immersioni) le applicazioni strutturalmente stabili sono dense.

Osservazione: Se s'indebolisce il tipo differenziabile nel tipo topologico, allora la stabilità strutturale è sempre una proprietà generica.

4.4. Geometria discriminante e catastrofi elementari.

Si vedrà ora in che modo viene affrontato, nel quadro del paradigma catastrofista, il problema dell'instabilità. S'è visto che l'insieme di biforcazione globale K dello spazio $\mathfrak{F}$ «geometrizza» la tassonomia delle forme stabili. Il problema è dunque di analizzare, almeno localmente e se possibile globalmente, tali geometrie discriminanti.

Sia dunque $f \in K$ una forma instabile. Bisogna descrivere la geometria di K nell'intorno di f. La situazione «ideale» sarebbe la seguente:

a) La classe d'equivalenza $G(f)$ di f è una «sottovarietà» (in generale di dimensione infinita) di $\mathfrak{F}$ di codimensione finita (detta codimensione di f).
b) Esistono localmente dei supplementari W di $G(f)$, ossia delle sottovarietà di dimensione uguale alla codimensione di f e trasverse a $G(f)$ in f (si avrà dunque $G(f) \cap W=\{f\}$). Tali supplementari si diranno sezioni trasverse.
c) La geometria della traccia di K su W, cioè la geometria della coppia $(W, K_W=W \cap K)$ resta invariante allorché W varia nell'insieme delle sezioni trasverse. (W, K_W) si dirà modello trasverso di centro organizzatore f.
d) Localmente K è il prodotto diretto dell'orbita $G(f)$ e di K_W (fig. 11).

In generale la situazione è molto piú complicata e la sua analisi si rivela grandemente difficile. Ma nel caso delle applicazioni $f: M \to \mathbf{R}$ di codimensione piccola si sono potuti dimostrare i punti *a*)-*d*). La cosa piú difficile è dimostrare il punto *c*), nella misura in cui ci si pone nel campo reale ove a priori potrebbe succedere che, quando W varia, certe parti di K_W diventino immaginarie. Il teorema di preparazione di Malgrange già citato è essenziale per la dimostrazione.

I modelli trasversi di funzioni reali di codimensione inferiore o uguale a 4 sono stati chiamati da Thom catastrofi elementari (cfr. l'articolo «Catastrofi» in questa stessa *Enciclopedia*). Eccone un esempio.

Sia $f: M \to \mathbf{R}$ una funzione instabile. Si può mostrare che esistono due cau-

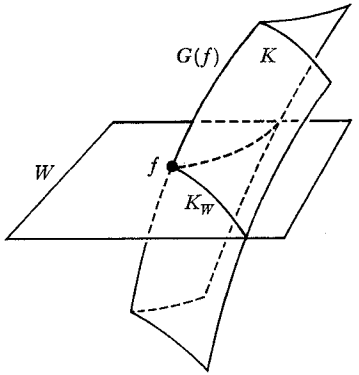


Figura 11.
Struttura locale ideale di K nell'intorno d'una forma instabile di codimensione finita.

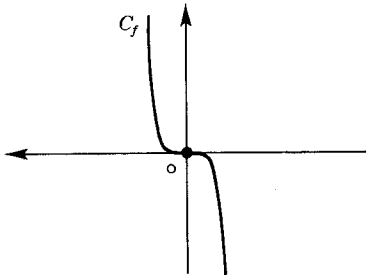


Figura 12.
Grafico di $f(x)=x^5$.

Figura 13.
Tipi fondamentali di funzioni stabilizzate di $f(x)=x^5$.

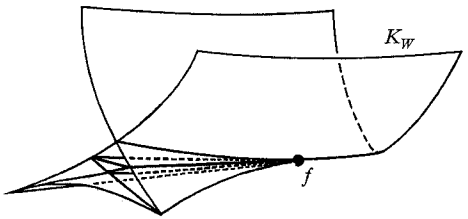


Figura 14.
Modello trasverso della singolarità x^5, detta coda di rondine.

se essenziali d'instabilità per le funzioni: 1) alcuni punti critici sono degeneri; 2) alcuni valori critici sono uguali.

È allora possibile rendere f stabile mediante piccole deformazioni: *a*) facendo «esplodere» i suoi punti critici degeneri in tanti punti critici non degeneri che li rigenerano per «collasso» o per «implosione»; *b*) separando i valori critici.

Si ottiene cosí un insieme finito di stabilizzazioni distinte di f utilizzando funzioni instabili intermedie. Tali successivi gradi di stabilizzazione possono essere «letti» direttamente sulla geometria di un modello trasverso di K in f, sotto forma di una stratificazione.

Si consideri per esempio l'applicazione instabile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ data da $f(x)=x^5$. Essa ammette l'origine come unico punto critico degenere. Il suo grafico C_f è una curva di $\mathbf{R}^2$ che ammette nell'origine un punto di flesso «appiattito» (fig. 12). La derivata di f vale $5x^4$ e diventa, per piccole perturbazioni, un'equazione generale di quarto grado che può genericamente possedere quattro radici complesse a due a due coniugate, due radici complesse coniugate e due radici reali distinte, oppure ancora quattro radici reali distinte. Questi tre casi corrispondono ai tre tipi fondamentali di funzioni stabilizzate di f presentati nella figura 13.

Poiché f non può piú diventare singolare per piccole deformazioni (infatti la proprietà di stabilità è una proprietà aperta e per questo il processo di stabilizzazione è irreversibile), è ovvio che ogni intorno sufficientemente piccolo di f è costituito da funzioni stabilizzate e da funzioni di transizione parzialmente stabilizzate (tab. 1) ove gli m_i (rispettivamente gli M_i) indicano i minimi (rispettivamente i massimi) non degeneri.

Fin qui si tratta soltanto di tassonomia (lista di casi). Bisogna ora vedere come la morfologia discriminante K permette di geometrizzare tale tassonomia. La singolarità x^5 è una catastrofe elementare; perciò i punti *a*) e *d*) (p. 463) sono validi e basta dunque considerare un modello trasverso (W, K_W) (fig. 14). Si può dimostrare che x^5 è una singolarità di codimensione 3.

La sezione trasversa W ha dunque dimensione 3. K_W geometrizza la tassonomia nella misura in cui:

a) K_W è una superficie che decompone W in sette cellule aperte disgiunte corrispondenti ai sette tipi di funzioni stabilizzate di f;
b) i gradi d'instabilità intermedi possono essere «letti» sulla stratificazione di K_W che rende fenomenologica la decomposizione di K_W in orbite sotto l'azione di G. Piú precisamente K_W si compone di strati di dimensione 2 (ossia di codimensione 1) in corrispondenza alle instabilità di codimensione 1 che garantiscono le transizioni $1\text{-}2_1$, $1\text{-}2_2$, $2_1\text{-}3$, $2_2\text{-}3$, 3-4, 4-5, 4-6, 5-2, 6-2, 5-7, 6-7, 7-2. Questi strati si incollano lungo strati di dimensione 1 (cioè di codimensione 2) corrispondenti alle instabilità di codimensione 2 che garantiscono le transizioni $1\text{-}2_1\text{-}2_2\text{-}3$, $2_1\text{-}3\text{-}4\text{-}5$, $2_2\text{-}3\text{-}4\text{-}6$, 4-5-6-7, 2-5-7, 2-6-7. Infine tali strati si incollano nel punto f, centro organizzatore della morfologia;
c) la morfologia K_W è invariante quando si contrae W. Dal punto di vista topologico si tratta di una morfologia tipo «cono» di vertice f.

Tabella 1.

Funzioni stabilizzate e parzialmente stabilizzate di transizione.

1. Nessun punto critico.

2. Un massimo e un minimo. Vi sono due possibilità:

2_1.

2_2.

1-2. Flesso semplice. Transizione tra 1 e 2. Vi sono due possibilità (1-2, e $1\text{-}2_2$) a seconda che collassi la coppia m_1, M_1, oppure la m_2, M_2.

3. Due minimi e due massimi. Tale caso, di complessità massimale, è unico. Si supporrà ch'esso corrisponda all'ordine:

3-2. Transizione tra 3 e 2. Vi sono due possibilità:

$3\text{-}2_1$.

Per collasso di m_2 ed M_2.

$3\text{-}2_2$.

Per collasso di m_1 ed M_1.

4.

$m_2<m_1<M_2<M_1$.

3-4.

$m_2<m_1=M_2<M_1$.

5.

$m_1<m_2<M_2<M_1$.

4-5.

$m_1=m_2<M_2<M_1$.

$5\text{-}2_1$.

Per collasso di m_2 ed M_2.

6.

$m_2<m_1<M_1<M_2$.

6-4.

$m_2<m_1<M_1<M_2$.

$6\text{-}2_2$.

Per collasso di m_1 ed M_1.

7.

$m_1<m_2<M_1<M_2$.

7-2.

Per collasso di m_2 ed M_2.

7-5.

$m_1<m_2<M_1=M_2$.

7-6.

$m_1=m_2<M_1<M_2$.

$1\text{-}2_1\text{-}2_2\text{-}3$. Due punti di flesso.

$2_1\text{-}3\text{-}4\text{-}5$. Un punto di flesso all'altezza di m_1 (becco).

$2_2\text{-}3\text{-}4\text{-}6$. Un punto di flesso all'altezza di M_2.

4-5-6-7. $m_1=m_2<M_1=M_2$.

2-5-7.

Collasso di M_1, m_2 e M_2 (cuspide duale).

2-6-7.

Collasso di m_1, M_1 ed m_2 (cuspide).

Osservazione: È chiaro in che cosa la stratificazione di K – che, si ricordi, coincide in questo caso con la decomposizione di K in G-orbite – è fenomenologica: per disegnare K_W «occorre e basta» disegnare la sua stratificazione, le linee di autointersezione e i suoi spigoli di regresso. Benché in apparenza anodina, questa osservazione ha una grossa portata filosofica poiché mette in luce il fatto che le morfologie discriminanti che geometrizzano le tassonomie evidenziano un'intuizione originaria. Inoltre, per l'ipotesi ontologica della teoria delle catastrofi questa intuizione originaria viene ad essere donatrice di significato.

Il modo con cui K_W geometrizza la tassonomia dei successivi stabilizzati di f è rappresentato nella figura 15, che va attentamente esaminata.

4.5. Dispiegamento universale.

In ciò che precede W è una sezione trasversa, in $\mathfrak{F}$, dell'orbita $G(f)$ di f. D'altronde, poiché W è una sottovarietà di $\mathfrak{F}$ di dimensione $n=\operatorname{codim} f$, essa è diffeomorfa ad un intorno U dell'origine di $\mathbf{R}^n$, grazie ad un diffeomorfismo $\varphi : U \to W$. Siano allora $u=(u_1, \ldots, u_n)$ le coordinate di U e $(g_1, \ldots, g_n)$ le immagini mediante φ dei vettori unitari di U (si può supporre che U contenga la sfera unitaria di $\mathbf{R}^n$). Ogni funzione g di W si scrive $g=f+u_1g_1+\ldots+u_ng_n=f_u$. W si può dunque interpretare come una famiglia f_u di funzioni parametrizzate da U. In generale si chiama dispiegamento di f ogni famiglia f_t parametrizzata da uno spazio di controllo $(T, 0)$ tale che $f_0=f$. Il dispiegamento ora considerato e che «esternalizza» in qualche modo la struttura di $\mathfrak{F}$ nell'intorno di f è in una certa misura il «miglior» dispiegamento di f, poiché permette di ricostruire tutti gli altri.

TEOREMA. *Ogni dispiegamento f_t di f si può ottenere come immagine reciproca di f_u mediante un'applicazione $\psi : T \to U$ unica al prim'ordine.*

f_u prende il nome di dispiegamento universale di f, proprio perché risolve il precedente problema universale.

Un problema tecnico e difficile è allora quello di trovare un modello canonico di dispiegamento universale sul quale sia possibile far calcoli. Nel caso della singolarità x^5 si dimostra che un modello canonico è $f_u=x^5+u_1x^3+u_2x^2+$ $+u_3x$. Ciò permette di costruire K_W con facilità.

L'esistenza di dispiegamenti universali permette d'altra parte di mostrare che la teoria della stabilità delle applicazioni $f : M \to \mathbf{R}$ è indissociabile da quella delle applicazioni $f : M \to N$. Dire infatti che f_u è un dispiegamento universale di f equivale a dire che l'applicazione $F : M \times U \to \mathbf{R} \times U$, che porta (x, u) in $(f_u(x), u)$, è la piú semplice applicazione di questo tipo che sia strutturalmente stabile.

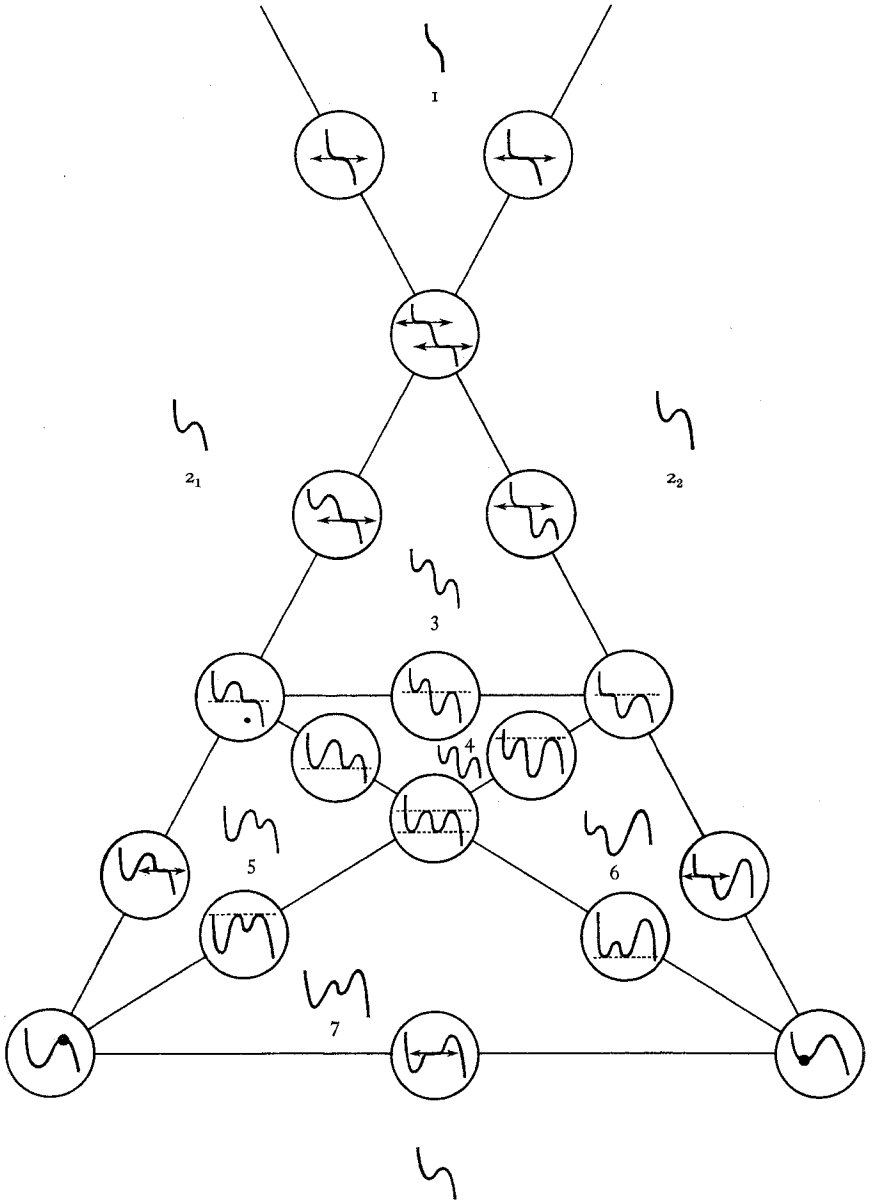


Figura 15.
Geometrizzazione della tassonomia delle successive funzioni stabilizzate di $f(x)=x^5$.

4.6. La dialettica locale/globale nei dispiegamenti.

I dispiegamenti delle singolarità forniscono un nuovo paradigma di dialettica tra il locale e il globale. La nozione di stabilizzazione (parziale o totale) introduce una relazione di preordine o di incidenza tra singolarità. L'asimmetria di questa relazione, esprimente in qualche modo l'irreversibilità dei processi di stabilizzazione, può sembrare un po' paradossale. Essa discende dal fatto che la proprietà di stabilità è aperta. Se dunque per «esplosione» di un punto critico o per separazione di valori critici di f si stabilizza f in f_s per deformazione infinitesimale, non si può «tornare» da f_s ad f che per deformazione finita. Mediante deformazioni infinitesimali si può soltanto, una volta raggiunta f_s, ottenere di nuovo f_s, poiché f_s è stabile.

La dialettica locale/globale inerente al concetto di dispiegamento si esprime allora col fatto che un modello trasverso ad una singolarità contiene modelli trasversi di tutte le singolarità incidenti a questa. Si consideri per esempio un punto di transizione g del tipo 2-7: nel caso $f(x)=x^5$. g possiede come sola instabilità un punto di piega, ossia un punto di flesso semplice. Orbene, un punto di flesso semplice ammette come modello trasverso il modello unidimensionale della figura 16. Ma una qualunque sezione trasversa a K_W in g (cioè ogni arco trasverso in g allo strato di g) fornisce un tale modello (fig. 17).

Si consideri analogamente un punto h del tipo 2-6-7. h possiede come unica instabilità una cuspide; essa ammette come modello trasverso il modello bidimensionale della figura 18. Ma un tale modello è fornito da una qualsiasi sezione trasversa a K_W in h (cioè una qualsiasi sezione piana trasversa in h allo strato unidimensionale di h) (fig. 19).

Un modello trasverso (W, K_W) di f s'interpreta dunque come un incollamento di modelli trasversi delle singolarità incidenti ad f. Come dispiegamento del centro organizzatore f, (W, K_W) è una entità locale. Come incollamento di dispiegamenti più semplici, (W, K_W) è invece un'entità globale. Se tale modello venisse rappresentato, secondo quanto proposto da Zeeman, come una «parola» (globale) composta di «lettere» (locale), si concluderebbe che in tale curioso alfabeto ciò che è «parola» composta è indistinguibilmente «lettera» irriducibile. La dialettica locale/globale, associata al concetto di dispiegamento,

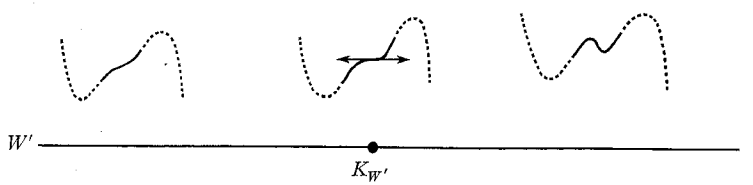


Figura 16.
Dispiegamento universale d'un punto di flesso semplice.

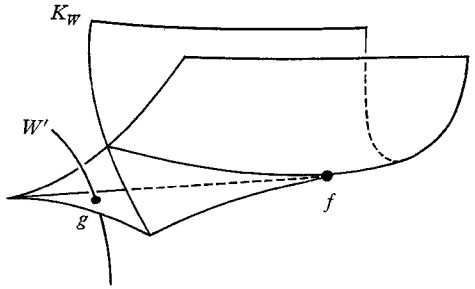


Figura 17.
Ogni sezione trasversa di K_W in g è un modello trasverso di g.

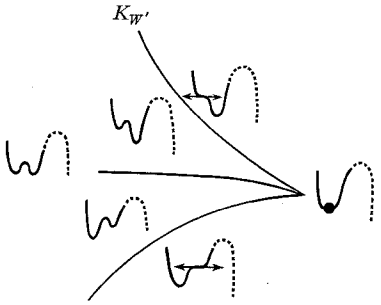


Figura 18.
Dispiegamento universale di una cuspide.

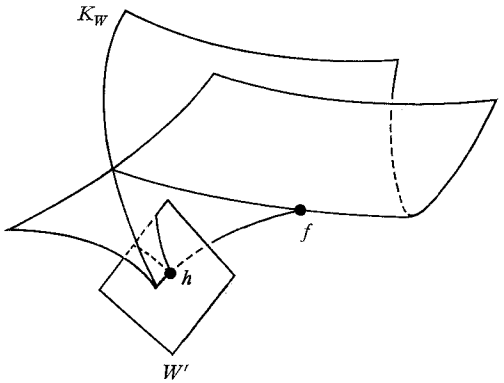


Figura 19.
Una qualsiasi sezione trasversa di K_W in h è un modello trasverso di h.

fornisce dunque un paradigma in cui la nozione classica di livelli gerarchici e le opposizioni presunte universali semplice/complesso, composto/irriducibile, locale/globale, atomo/ammasso, componente/sistema, ecc. diventano non pertinenti. Infatti questo paradigma geometrizza in una certa misura quello della monadologia leibniziana.

5. *La teoria di Morse come passaggio dal locale al globale.*

Dopo aver indicato alcuni aspetti del paradigma catastrofista, si riprende ora la sua idea centrale, ossia che, nel caso differenziabile, il vincolo di stabilità strutturale permette di ripassare dal locale al globale, ma con modalità tutta diversa da quella del prolungamento analitico. Il caso piú chiaro e piú tipico a tal riguardo è fornito dalla teoria di Morse e dalle sue applicazioni.

5.1. Funzioni di Morse e presentazioni per anse.

Si è visto che le applicazioni differenziabili $f: M \to \mathbf{R}$ sono genericamente quelle *a*) che ammettono solo punti critici non degeneri isolati; *b*) che possiedono valori critici tutti distinti. Tali funzioni si chiamano funzioni di Morse (su M). Se ci si limita a considerare varietà M compatte al fine di evitare le instabilità dovute all'eventuale accumularsi dei punti critici all'infinito, si può dimostrare che le proprietà *a*) e *b*) sono caratteristiche della stabilità strutturale.

TEOREMA. *Sia M una varietà compatta. $f: M \to \mathbf{R}$ è strutturalmente stabile se e solo se è una funzione di Morse. Essa ammette allora un numero finito di punti critici non degeneri aventi valori critici tutti distinti.*

Su di una varietà compatta esistono dunque due sole cause d'instabilità per le funzioni: il degenerare di punti critici e il coincidere di valori critici. La prima dà origine per dispiegamento alle catastrofi dette di biforcazione e la seconda alle catastrofi dette di conflitto.

Si vedrà ora che le funzioni di Morse sono intimamente legate alla struttura globale della varietà M. Siano f una funzione di Morse su M (di dimensione n) ed $x \in M$ un punto critico di f. Poiché x per definizione è non degenere, lo sviluppo di Taylor $T_x(f)$ di f in x inizia (dopo il termine costante $f(x)$) con la forma bilineare non degenere e simmetrica

$$h^t Hh = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) h_i h_j$$

ove $h = (h_1, \ldots, h_n)$ è un incremento di x e H l'hessiana di f in x. Per un risultato classico di algebra lineare una forma bilineare simmetrica non degenere è diagonalizzabile. Mediante un cambiamento lineare di coordinate si può dunque scrivere $T_x(f)$ sotto la forma $T_x(f) = f(x) - (h_1^2 + \ldots + h_k^2) + h_{k+1}^2 + \ldots + h_n^2 +$ termini del terzo ordine. Il numero k di quadrati preceduti dal segno $-$ non dipende dal sistema di coordinate scelto e si chiama indice del punto critico.

Ma si può invero andare molto piú lontano nell'analisi della struttura locale di f nell'intorno di un punto critico non degenere. Un famoso teorema di Morse afferma infatti che i punti critici non degeneri sono determinati dell'ordine 2.

TEOREMA (Morse). *Sia $x \in M$ un punto critico non degenere d'indice k di $f: M \to \mathbf{R}$. Esistono in M coordinate locali tali che f si può scrivere nell'intorno di x nella forma canonica:* $f(x+h) = f(x) - (h_1^2 + \ldots + h_k^2) + h_{k+1}^2 + \ldots + h_n^2$.

Sono dunque disponibili modelli locali canonici per i punti critici di una funzione di Morse. Si tratta di vertici (indice n), oppure di bacini (indice 0), oppure di colli. Inoltre M può essere rappresentata nella forma di un «incollamento» di tali modelli. Uno degli aspetti piú manifesti del nuovo tipo di solidarietà tra locale e globale già definito è che se $n(k)$ è il numero di punti critici d'indice k di f, la somma alternata $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k n(k)$ è uguale alla caratteristica d'Eulero-Poincaré $\chi(M)$ di M (cfr. l'articolo citato «Geometria e topologia»). Orbene, $\chi(M)$, che è l'invariante globale fondamentale di M, non dipende da f. Ancora una volta si constata che l'omologia del substrato influisce sulle entità derivate di tale substrato (in questo caso, sulle funzioni differenziabili a condizione che queste siano strutturalmente stabili).

Uno degli aspetti piú interessanti della solidarietà locale/globale caratteristica delle funzioni di Morse è nella possibilità di ricostruire topologicamente la varietà substrato M per successivi incollamenti di anse associate ai punti critici della funzione. L'analisi di tali presentazioni mediante anse e delle loro deformazioni è quindi equivalente a quella dei cammini nello spazio $\mathfrak{F}$ delle applicazioni differenziabili $f: M \to \mathbf{R}$ decomposto in cellule dall'insieme catastrofico globale K (il cui complementare $\mathfrak{F}_0$ è proprio l'insieme delle funzioni di Morse). Genericamente, tali cammini attraversano trasversalmente gli strati K_1 di codimensione 1 in un numero finito di punti e genericamente deformando tali cammini si attraversano al piú gli strati K_2 di codimensione 2 di K. Lo studio dettagliato di tali attraversamenti è all'origine di alcuni fra i piú significativi ed interessanti risultati della topologia differenziale moderna: ad esempio il teorema di h-cobordismo di Smale e il teorema di pseudo-isotopia di Cerf (e le loro estensioni dovute a Laudenbach e Chanciner [cfr. Hatcher e Wagoner 1973]) che costituiscono delle tappe decisive per la dimostrazione della congettura di Poincaré (cfr. il § 13 dell'articolo «Invariante» in questa stessa *Enciclopedia*).

6. *Strutture localmente triviali.*

Nelle tre sezioni precedenti si è fornito uno schema dei due casi tipici ed eterogenei di passaggio dal locale al globale riguardanti le funzioni. Nei due casi si è constatato che la dialettica locale/globale era indissociabile dal modo in cui il substrato delle applicazioni era esso stesso definito come incollamento di modelli locali. In questa sezione verrà un poco approfondita la nozione di incollamento ed introdotto il «linguaggio» della transizione dal locale al globale costituito dal linguaggio coomologico. Nella misura in cui le entità globali prese in esame saranno localmente equivalenti ad entità locali standard, esse saranno dette localmente triviali.

6.1. Varietà differenziabili e livelli di struttura.

Fin da quando fu intuitivamente introdotta da Riemann, la nozione di varietà conteneva due idee chiave che sovvertirono totalmente l'intuizione spaziale classica:

1) si possono localizzare le geometrie standard di $\mathbf{R}^n$ e di $\mathbf{C}^n$ e riglobalizzarle in modo non standard;
2) si possono trattare come «punti» entità che non sono punti geometrici. A tal fine basta che queste entità ammettano gradi di libertà interni che possano variare come punti geometrici.

Tali idee rese esplicite da Hermann Weyl nel caso delle superfici di Riemann (varietà olomorfe di dimensione 1) sono alla base del concetto di varietà, già presentato negli articoli «Applicazioni», «Curve e superfici», «Geometria e topologia» di questa stessa *Enciclopedia*.

Per tener conto dell'idea chiave 2) si parte da uno spazio topologico M localmente omeomorfo ad uno spazio standard $\mathbf{R}^n$. Tale spazio dicesi varietà topologica di dimensione n. Per definire strutture piú «rigide» su M (differenziabili, analitiche, algebriche) si osserva che M, essendo localmente omeomorfa ad $\mathbf{R}^n$, si ottiene incollando degli aperti U_i, detti carte locali, omeomorfi ad aperti U_i' di $\mathbf{R}^n$, tramite omeomorfismi di incollamento (o di transizione), tutti tra loro coerenti, detti cambiamenti di carte locali. L'idea è allora d'imporre condizioni supplementari a tali omeomorfismi di transizione. Cosí, rafforzando successivamente le condizioni imposte ai cambiamenti di carte locali, ne deriva una gerarchia di livelli di struttura il cui livello base è quello topologico. Questo semplice punto di vista orienta la teoria verso una serie di importantissimi problemi il cui studio ha costituito uno dei principali motori della matematica di questo secolo.

Il primo problema è quello della classificazione delle varietà. Si tratta di «misurare» quello che separa globalmente una varietà da uno spazio standard. L'esistenza di una gerarchia di livelli conduce a domandarsi dapprima quale sia il livello zero (classificazione topologica delle varietà: cfr. l'articolo «Geometria e topologia», pp. 660-72).

Una volta chiariti certi strumenti che permettono di abbordare la struttura del livello topologico, il problema della classificazione sbocca naturalmente nella seguente strategia: data una varietà munita d'una struttura d'un certo livello, si cerca di capire in che modo tale struttura vincoli i livelli superiori. Si può ad esempio partire da una varietà topologica M e cercare di classificare le strutture differenziabili su M che inducono la sua topologia. Questo difficile problema ha assunto una notevole importanza a partire dai lavori di Kervaire e Milnor sulla

struttura differenziabile delle sfere (teoria delle sfere esotiche): su certe sfere topologiche esistono strutture differenziabili diverse dalla struttura standard.

Inoltre, il problema della classificazione di tali strutture è in gran parte algebrizzabile.

Si può anche partire da una varietà differenziabile di dimensione pari e cercare di classificare le strutture olomorfe compatibili con la sua struttura differenziabile. Ad esempio s'è visto che le curve ellittiche (superfici di Riemann compatte di genere 1) sono tori, ossia quozienti di $\mathbf{R}^2$ mediante reticoli. Tutti i tori sono diffeomorfi, ma le curve ellittiche sono classificate mediante un invariante unidimensionale detto invariante modulare per cui si rimanda al citato articolo «Curve e superfici».

Un altro tipo di problema indotto dalla definizione stessa di varietà è quello di sapere in che misura un oggetto ottenuto per incollamento di modelli locali è identificabile a un sotto-oggetto d'un oggetto standard globale. Si tratta del problema delle immersioni regolari e piú in generale delle immersioni. In tale ambito particolarmente importanti sono i teoremi di tipo Whitney visti al § 4.3, i problemi della teoria dei nodi (immersioni regolari di $M = S^1$ in $\mathbf{R}^3$) e quello del rovesciamento della sfera S^2 in $\mathbf{R}^3$.

6.2. Fibrazioni localmente triviali.

Il caso forse piú importante di strutture localmente triviali è costituito dalle fibrazioni localmente triviali la cui nozione è stata sviluppata negli anni '30 nei lavori pionieristici di Whitney, Hopf e Stiefel. Molto spesso, per risolvere un problema o anche soltanto per porlo, si è condotti, data una varietà di base di tipo τ (differenziabile, analitica, algebrica, ecc.), ad associare ad ogni punto $x \in M$ un'entità F_x che varia in modo τ in funzione di x. Si dice allora che F_x è la fibra al di sopra di x e che l'insieme E delle fibre F_x costituisce una fibrazione (di base M), $\pi : E \to M$, di fibra $\pi^{-1}(x) = F_x$.

Molto frequentemente la variazione di F_x in funzione di x è tale che in un intorno abbastanza piccolo U di x, E ristretto ad U possiede la struttura di un prodotto diretto $U \times F$ di U per una fibra tipo F, ove la fibrazione s'identifica localmente alla fibrazione, detta triviale, $\pi : U \times F \to U$ essendo π la proiezione canonica. Si dice in tal caso che la fibrazione $\pi : E \to M$ è localmente triviale (l.t.). π si ottiene dunque per incollamento di modelli locali $U \times F$. Se M è connessa, tutte le fibre F_x sono τ-isomorfe alla fibra tipo F e ciò che caratterizza π è dunque il modo con cui essa si discosta dalla fibrazione globalmente triviale $M \times F \to M$. Ecco allora che si tratterà di elaborare un linguaggio generale atto a «misurare» questo scarto.

Per fare ciò verranno ora introdotte due idee intuitive. Sia $\gamma : a \to b$ un cammino sulla base M. Si parte dalla fibra F_a e si segue la sua τ-variazione lungo γ fino alla fibra F_b. Se γ è un cappio ($a = b$) si ritorna su F_a. Intuitivamente la fibrazione ristretta al «cerchio» γ non è triviale in quanto F_a tornerà su se stessa, ma «ruotata»: F_a torna globalmente in sé, in generale però non vi torna localmente. Essa vi ritorna tramite uno dei suoi automorfismi. Per analizzare le fibrazioni di fibra tipo F bisogna dunque anzitutto definire il gruppo G degli automorfismi ammissibili di F. D'altra parte se γ è un cappio omotopicamente od omologicamente triviale, sembra intuitivo che la fibrazione ristretta a γ deve potersi deformare nella fibrazione triviale $F_a \to \{a\}$ e dovrà dunque essere globalmente triviale. Ci si aspetta perciò che la non-trivialità di $\pi : E \to M$ provenga da un delicato collegamento tra la struttura del gruppo G e l'omotopia o l'omologia di M. In tal senso le fibrazioni l.t. integrano l'essenziale delle applicazioni della topologia algebrica allo studio delle proprietà globali delle varietà. Questa integrazione può del resto essere interpretata come una generalizzazione dell'analisi delle applicazioni di una varietà in un'altra. Sia infatti $f : M \to N$ una tale applicazione. Il suo grafico C_f è una sezione della fibrazione triviale $\pi : M \times N \to M$, vale a dire un'applicazione $C_f : M \to M \times N$ che manda x in $(x, f(x))$, tale che $\pi \circ C_f = \mathrm{Id}_M$. Le sezioni globali di una qualsiasi fibrazione l.t. $\pi : E \to M$, ossia le applicazioni $\sigma : M \to E$ tali che $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$, possono dunque essere interpretate come applicazioni generalizzate. Uno dei problemi fondamentali della teoria delle fibrazioni l.t. concerne la costruzione di sezioni globali (quelle locali esistono per definizione).

Si consideri per esempio una varietà differenziabile M di dimensione n. Lo spazio tangente T_x di M in x varia differenziabilmente con x e definisce una fibrazione l.t. $\pi : T_M \to M$ detta fibrato tangente a M. Una sezione di π è semplicemente un campo di vettori differenziabile su M. Se T_M fosse un fibrato triviale si potrebbero costruire dei campi «costanti» su M. Ma ciò non avviene in generale. Si sa infatti che esistono varietà come la sfera S^2 sulle quali ogni campo di vettori s'annulla necessariamente in certi punti (detti punti singolari). Ciò significa che ogni sezione di T_M interseca la sezione nulla e che T_M non è perciò globalmente triviale. Questa è una conseguenza di un teorema di solidarietà locale/globale analogo a quello visto in teoria di Morse. Ad ogni punto singolare isolato di un campo X su M si può associare un numero chiamato il suo indice. Il teorema dice che se M è compatta e se tutti i punti singolari di X sono isolati (allora sono in numero finito), la somma degl'indici è uguale alla caratteristica di Eulero-Poincaré di M.

Allorché il fibrato tangente T_M d'una varietà M è globalmente triviale, si dice che M è parallelizzabile. Ciò significa che si possono trovare n sezioni $X_1, \ldots, X_n$ di T_M globalmente linearmente indipendenti, cioè tali che $(X_1(x), \ldots, X_n(x))$ sia una base di T_x per ogni $x \in M$. In altri termini si può spostare differenziabilmente un riferimento di T_x. La ricerca di criteri che assicurino che M sia parallelizzabile è un problema difficile, interamente risolto nel caso delle sfere da Frank Adams [1962].

TEOREMA. *Le sole sfere parallelizzabili sono S^1, S^3 ed S^7.*

Tale risultato profondo e notevole è intimamente legato all'esistenza delle fibrazioni di Hopf delle sfere mediante sfere. Il suo corrispondente algebrico è il risultato che afferma che esiste struttura di corpo su $\mathbf{R}^n$ solo quando $n = 2$ (numeri complessi), $n = 4$ (quaternioni) e $n = 8$ (numeri di Cayley). Le sfere parallelizzabili sono le sfere unità di tali corpi.

Per precisare il concetto di fibrazione l.t. (differenziabile), si considerino uno spazio di base M che è una varietà differenziabile, uno spazio totale E, una proiezione $\pi : E \to M$, una fibra tipo F e un gruppo G di diffeomorfismi di F. Sia $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un sistema di carte locali di M che localmente trivializzano $\pi : E \to M$. Ciò significa, in primo luogo, che sono assegnati dei diffeomorfismi di trivializzazione φ_i sugli U_i che rendono commutativi i diagrammi:

$$\begin{tikzcd} U_i \times F \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr] & & \pi^{-1}(U_i) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

Per ogni $x \in U_i$, φ_i definisce pertanto un diffeomorfismo di cambiamento di fibra $\varphi_{i,x} : F \cong F_x = \pi^{-1}(x)$.

In secondo luogo, significa che i $\varphi_{i,x}$ soddisfano alla condizione d'incollamento «Se $i, j \in I$ sono tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora per ogni $x \in U_i \cap U_j$, $\vartheta_{ij}(x) = \varphi_{i,x}^{-1} \circ \varphi_{j,x} : F \to F$ è un elemento di G» (che varia in modo differenziabile con x se G è un gruppo differenziabile).

È allora banale verificare che se $i, j, k \in I$ sono tali che $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, ϑ_{ij}, ϑ_{jk}, e ϑ_{ik} sono legati dalla relazione fondamentale $\vartheta_{ij}\vartheta_{jk}\vartheta_{ki} = 1$ (si noti che $\vartheta_{ki} = \vartheta_{ik}^{-1}$).

Questa relazione permette di esprimere quanto precede in modo piú concettuale, in termini che condurranno alla coomologia di Čech. Il ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ di M induce una struttura combinatoria K detta simpliciale sull'insieme I degl'indici. Gli 0-simplessi sono gli elementi di I. Gli 1-simplessi le coppie (i, j) tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. I 2-simplessi le terne (i, j, k) tali che $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, ecc. Si possono poi addizionare formalmente i simplessi. Il complesso simpliciale K viene detto scheletro del ricoprimento $\mathfrak{U}$. Esso esprime il modo con cui per M si pone il problema dell'incollamento: se M fosse uno spazio standard, $\mathfrak{U}$ potrebbe ridursi a un unico elemento e K sarebbe allora triviale. L'altro dato del problema è il gruppo strutturale G. Per ogni aperto U di M si indichi con $\Gamma(U)$ l'insieme delle applicazioni (differenziabili se G lo è) $\vartheta : U \to G$. Se $\vartheta \in \Gamma(U)$ e $V \subset U$, ϑ induce per restrizione a V un elemento $\vartheta|_V$ di $\Gamma(V)$. Dicesi prefascio su M a valori in G un tale dato. Si tornerà su questo concetto al § 7.1. Se s è un simplesso di K, ad esso si associa il gruppo $\Gamma_s = \Gamma(\bigcap_s \mathfrak{U})$ ove $\bigcap_s \mathfrak{U}$ è l'intersezione (non vuota) degli aperti di $\mathfrak{U}$ il cui indice appartiene ad s. Si definisce cosí quello che si chiama sistema di coefficienti che permette allora di definire naturalmente la nozione di cocatena.

DEFINIZIONE. *Una p-cocatena associa ad ogni p-simplesso s un elemento del gruppo* Γ_s.

Una 0-cocatena associa dunque ad ogni 0-simplesso $i \in I$ un'applicazione $\varphi_i : U_i \to G$. Una 1-cocatena associa ad ogni 1-simplesso (i, j) di K un'applicazione $\vartheta_{ij} : U_i \cap U_j \to G$. Una 2-cocatena associa ad ogni 2-simplesso (i, j, k) di K un'applicazione $\psi_{i,j,k} : U_i \cap U_j \cap U_k \to G$, ecc. Il maggiore interesse di tale costruzione è di mettere in evidenza l'operatore cobordo che associa a una p-catena una $(p+1)$-cocatena detta il suo cobordo. Se ad esempio $\varphi = (\varphi_i)_{i \in I}$ è una 0-cocatena, il suo cobordo $\delta\varphi$ è la 1-cocatena ϑ che associa ad ogni 1-simplesso (i, j) di K l'applicazione $\vartheta_{ij} = \varphi_i^{-1}\varphi_j$ (G essendo un gruppo, si possono comporre le applicazioni a valori in G). Analogamente, se $\vartheta = (\vartheta_{ij})$ è una 1-cocatena, il suo cobordo $\delta\vartheta$ è la 2-cocatena ψ che associa ad ogni 2-simplesso (i, j, k) di K l'applicazione $\psi_{ijk} = \vartheta_{ki}\vartheta_{ij}\vartheta_{jk}$. Se ϑ è anch'esso un cobordo, $\vartheta = \delta\varphi$, allora $\delta\vartheta = \varphi_k^{-1}\varphi_i\varphi_i^{-1}\varphi_j\varphi_j^{-1}\varphi_k = 1$. Si ha dunque $\delta^2 = 1$.

Osservazione: Affinché ciò che precede sia naturale bisogna che il gruppo G sia commutativo. Si usa allora una notazione additiva e si ottiene $\vartheta_{ij} = -\vartheta_{ji}$, $\vartheta_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$, $\psi_{ijk} = \vartheta_{ij} + \vartheta_{jk} + \vartheta_{ki}$, e $\delta^2 = 0$.

La relazione fondamentale $\delta^2 = 0$, analoga a quella incontrata a proposito dell'omologia (cfr. il § 4.3 dell'articolo citato «Geometria e topologia»), permette di definire i gruppi di coomologia $H^p(\mathfrak{U}, G)$ del ricoprimento $\mathfrak{U}$ a coefficienti in G. $H^p(\mathfrak{U}, G)$ è il quoziente del gruppo delle p-cocatene a cobordo nullo (dette p-cocicli) rispetto al sottogruppo delle p-cocatene che sono cobordi [per maggiori dettagli si veda il classico Godement 1964].

A parte le difficoltà dovute alla non-commutatività, si può affermare che dare una fibrazione l.t. è essenzialmente equivalente ad assegnare un 1-cociclo a coefficienti in G. Si ha in effetti il teorema:

TEOREMA. *Se $\vartheta = (\vartheta_{ij})$ è un 1-cociclo a coefficienti in G, esiste, a meno di equivalenze, uno ed un solo fibrato l.t., di fibra F e di gruppo G, le cui ϑ_{ij} sono le applicazioni d'incollamento.*

In tale descrizione la proprietà di trivialità globale si rivela essere d'ordine essenzialmente coomologico.

TEOREMA. *La fibrazione E è triviale se e solo se l'1-cociclo è un cobordo, cioè se e solo se esistono delle $\varphi_i : U_i \to G$ tali che $\vartheta_{ij} = \varphi_i^{-1}\varphi_j$.*

Osservazione: L'1-cociclo ϑ che definisce E ha sempre l'aspetto di un cobordo poiché, per definizione, le ϑ_{ij} sono della forma $\varphi_i^{-1}\varphi_j$. Le φ_i non sono però applicazioni di U_i in G. Per $x \in U_i$, $\varphi_i(x)$ non è un automorfismo di F ma un isomorfismo tra F ed F_x; esattamente in ciò consiste tutta la differenza.

La teoria delle fibrazioni l.t. si semplifica notevolmente quando ci si limita ai fibrati detti principali, ossia ai fibrati di fibra G e di gruppo strutturale G operante su se stesso per traslazioni. Ad ogni fibrato l.t. si associa un fibrato principale definito dal medesimo 1-cociclo; inoltre, per quello che precede, un fibrato l.t. è caratterizzato, a meno di equivalenze, dal suo fibrato principale associato e dall'azione del suo gruppo strutturale sulla fibra tipo.

Se la teoria dei fibrati principali è relativamente semplice ciò è dovuto al fatto che esiste un criterio semplice di trivialità.

TEOREMA. *Un fibrato principale è triviale se e solo se ammette una sezione.*

Tale risultato permette di capire il nesso tra il fatto che le sfere S^1, S^3 ed S^7 siano parallelizzabili e il fatto che esistano strutture di corpo su $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^4$ ed $\mathbf{R}^8$.

Si tratterà ora del linguaggio coomologico che è per eccellenza il linguaggio di transizione dal locale al globale nella misura in cui permette di misurarne l'ostruzione.

Inizialmente si consideri il caso semplice in cui il gruppo strutturale G è discreto. Tal è in particolare il caso delle fibrazioni l.t. elementari che sono i rivestimenti non ramificati. Si supponga che la base M sia connessa per archi e sia $\gamma : x_0 \to x_1$ un cammino $\gamma(t) = x_t$, $t \in I$ di M. «Risalendo» nello spazio totale, si può seguire la fibra sopra γ attraverso una famiglia d'isomorfismi $h_t : F_{x_0} \xrightarrow{\sim} F_{x_t}$. Se G è discreto, il principio del rilevamento delle omotopie garantisce che tale «traslazione» della fibra è unica e dipende soltanto dalla classe d'omotopia di γ. Se in particolare γ è un cappio, $h_1 : F_{x_0} \to F_{x_0}$ è un elemento di G. Si definisce cosí un morfismo $\chi_E : \pi_1(M) \to G$ che dicesi la classe caratteristica di E. χ è «caratteristica» nel senso seguente:

TEOREMA. 1) *Due fibrati aventi lo stesso gruppo discreto sono associati, ossia di ugual fibrato principale, se e solo se le loro classi caratteristiche sono uguali.* 2) *Per ogni morfismo $\chi : \pi_1(M) \to G$ esiste un fibrato principale E di gruppo G tale che $\chi_E = \chi$.*

In tal caso la classificazione dei fibrati è ricondotta allo studio puramente algebrico dei morfismi χ.

COROLLARIO. Se M è semplicemente connessa, ogni fibrato di gruppo G è triviale.

Osservazione: Ciò mostra che l'ipotesi G discreto è essenziale. S^2 è semplicemente connessa ma il suo fibrato tangente (avente gruppo strutturale il gruppo lineare non discreto $GL(2)$) è non triviale.

Nel caso dei fibrati principali di gruppo qualsiasi, le classi caratteristiche si deducono in dimensione > 1 dalla successione esatta di omotopia.

La nozione di classe caratteristica è l'inizio della teoria coomologica dei fibrati l.t., la quale misura l'ostruzione al passaggio dal locale al globale e in particolare l'ostruzione alla costruzione di una sezione globale. Si supponga che la base M di dimensione n sia assegnata sotto la forma di un complesso cellulare K, cioè triangolata da un numero finito di poliedri convessi pieni, di dimensione n. Per costruire una sezione globale di un fibrato l.t. $\pi : E \to M$ l'idea sarà di supporla data sulle p-facce di K e di cercare di prolungarla alle $(p+1)$-facce. Si tratterà poi di misurare l'ostruzione ad una tale estensione. L'ostruzione all'estensione ad *una* cellula è descritta da un opportuno cociclo della fibra. La difficoltà proviene dal fatto che la coomologia della fibra, anche se sempre isomorfa a quella della fibra tipo F, *varia* con la fibra. Si deve quindi considerare il fibrato l.t. che esprime tale variazione ed estendervi la teoria della coomologia (coomologia a valori in un fibrato di coefficienti). L'ostruzione alla costruzione di una sezione globale di π viene allora misurata da una classe di coomologia

in questo nuovo senso; si tratta di una classe che dipende solo da π e viene detta classe caratteristica di coomologia di E [cfr. Steenrod 1951].

A partire dagli anni '50 il concetto di classe caratteristica è stato oggetto di sviluppi considerevoli e si è rivelato uno strumento essenziale alla comprensione della dialettica locale/globale.

6.3. Linguaggio categoriale dell'incollamento.

Per concludere questo paragrafo sulle strutture localmente triviali si noti che la nozione di incollamento può tradursi in termini puramente categoriali. Una tale traduzione è interessante poiché permette di trasportare la nozione di incollamento a situazioni in cui l'intuizione geometrica viene meno.

Come s'è visto, una varietà topologica è uno spazio topologico M munito di un ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ i cui aperti U_i sono omeomorfi ad aperti di $\mathbf{R}^n$. Per definire poi le strutture di livello superiore su M s'impongono certi vincoli supplementari agli omeomorfismi di transizione. Dal punto di vista categoriale, ciò equivale a considerare la categoria Top degli spazi topologici e la categoria piccola $\mathfrak{M}$ dei modelli locali i cui oggetti sono gli aperti di $\mathbf{R}^n$ (o di $\mathbf{C}^n$) e i morfismi sono gli isomorfismi locali differenziabili (o analitici).

In generale, data una categoria $\mathcal{C}$, una categoria (piccola) di modelli locali $\mathfrak{M}$ e un funtore inclusione $I : \mathfrak{M} \to \mathcal{C}$, si tratta di definire gli oggetti globali di $\mathcal{C}$ ottenuti per incollamento di modelli locali. Tale costruzione [per una esposizione dettagliata della quale si veda Appelgate e Tierney 1966-67], oltre ad avere grande generalità, riconduce i problemi di incollamento all'analisi di strutture *puramente categoriche* associate all'esistenza di coppie di funtori aggiunti.

7. *Fasci e coomologia dei fasci.*

Nel paragrafo precedente ci si è occupati del passaggio dal locale al globale ottenuto per incollamento di spazi substrati. Ciò ha condotto al concetto di fibrato localmente triviale e di sezione come anche al problema di prolungare le sezioni. Prima ci si era interessati al passaggio dal locale al globale ottenuto per incollamento di funzioni. Esiste un intimo legame tra i due punti di vista. Si è visto, ad esempio, nel caso analitico, che il prolungamento analitico di una funzione olomorfa data localmente determinava il proprio spazio substrato. È dunque augurabile disporre d'un linguaggio unitario e generale che sintetizzi i due punti di vista. Tale è il fine della teoria dei fasci di cui si daranno le definizioni di base.

7.1. Fasci e spazi *étalé*.

Nella teoria dei fasci il concetto primitivo è quello di «sezione». L'idea è di definire in modo generale gli assiomi cui devono soddisfare certe entità affinché esse meritino il nome di sezioni; poi di costruire uno spazio «fibrato» (che non

sarà in generale un fibrato l.t.) le cui sezioni si identifichino con le sezioni date.

Per poter parlare di sezioni, bisogna dapprima disporre di uno spazio di base M che sia uno spazio topologico. Ad ogni aperto U di M si associa un insieme di sezioni su U che verrà denotato $\Gamma(U)$. Il primo vincolo è allora che sia definita la nozione di restrizione di una sezione. In altre parole se $V \subset U$ è un sottoaperto di U, bisogna poter associare ad ogni elemento $f \in \Gamma(U)$ un elemento $f|_V \in \Gamma(V)$ e ciò in modo che *a*) $f|_V = f$, *b*) se $W \subset V \subset U$, $(f|_V)|_W = f|_W$ (transitività della restrizione). Questo vincolo si esprime molto facilmente in termini di categorie. Sia $\mathfrak{M}$ la categoria piccola i cui oggetti sono gli aperti di M ed i morfismi le inclusioni di aperti. Affinché la nozione di restrizione sia definita, occorre e basta che i $\Gamma(U)$ costituiscano un funtore della categoria $\mathfrak{M}^*$ duale di $\mathfrak{M}$ nella categoria $\mathfrak{S}$ degli insiemi (cfr. il § 2 dell'articolo «Dualità» in questa stessa *Enciclopedia*). Da cui la seguente definizione:

DEFINIZIONE. *Si chiama prefascio su M un funtore controvariante di $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{S}$.*

È chiaro che i prefasci formano una categoria, precisamente la categoria $(\mathfrak{M}^*, \mathfrak{S})$ dei funtori di $\mathfrak{M}^*$ in $\mathfrak{S}$.

Sia dunque Γ un prefascio su M. È chiaro che se Γ è il prefascio delle sezioni di M in uno spazio totale E, esso soddisfa alle due seguenti proprietà:

(F_1) Sia $(U_i)_{i \in I}$ una famiglia di aperti di M la cui unione è U e siano $f, f' \in \Gamma(U)$. Se le restrizioni di f ed f' agli U_i sono uguali, allora f ed f' sono uguali (se $f = f'$ localmente, allora $f = f'$ globalmente).

(F_2) Per ogni $i \in I$ sia $f_i \in \Gamma(U_i)$. Se le f_i sono compatibili, cioè coincidono sulle intersezioni $U_i \cap U_j$ che sono non-vuote, allora esiste una sezione $f \in \Gamma(U)$ tale che $f|_{U_i} = f_i$ per ogni $i \in I$.

DEFINIZIONE. *Un prefascio su M è un fascio se esso soddisfa gli assiomi (F_1) ed (F_2).*

Ora che si dispone d'una definizione assiomatica dei fasci, si tratta di sapere se ogni fascio astratto è rappresentabile come il fascio delle sezioni d'un «fibrato» $\pi : E \to M$.

Sia $\mathfrak{T}_M$ la categoria degli spazi topologici «al di sopra» di M, ossia la categoria i cui oggetti sono le applicazioni continue $\pi : E \to M$ ed i morfismi i diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \arrow[dl, "\rho"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Le inclusioni $U \subset M$ definiscono banalmente una inclusione $I : \mathfrak{M} \to \mathfrak{T}_M$. Si noterà che si riottiene cosí la situazione del § 6.3.

Per soddisfare (F_1) si effettua un passaggio al limite atto ad assicurare che due sezioni uguali in un intorno di $x \in M$ sono *effettivamente* localmente uguali.

Sia $\mathfrak{U}_x$ il filtro degli intorni di x. Poiché la categoria degli insiemi ammette limiti induttivi, si può costruire il limite induttivo

$$E_x = \varinjlim_{i : V \hookrightarrow U \in \mathfrak{U}_x} (\Gamma(U), \Gamma(i)).$$

E_x è la fibra in x dello spazio E_Γ che si cerca. Sia E_Γ la somma insiemistica degli E_x per $x \in M$. E_Γ è per definizione dotato d'una proiezione $\pi_\Gamma : E_\Gamma \to M$. Sia $f \in \Gamma(U)$ una sezione del prefascio Γ su U. f possiede un'immagine $f(x)$ in E_x per ogni $x \in U$, immagine detta valore di f in x. Si viene cosí ad associare a f una sezione (nel senso insiemistico) $\tilde{f}$ di E_Γ sopra U. Si definisce allora la topologia di E_Γ come la piú fine topologia che rende tutte le $\tilde{f}$ continue.

TEOREMA. *Per la topologia di E_Γ or ora definita la proiezione $\pi_\Gamma : E_\Gamma \to M$ diventa un omeomorfismo locale.*

DEFINIZIONE. *Viene chiamato spazio «étalé» su M ogni proiezione continua $\pi : E \to M$ che sia un omeomorfismo locale.*

Si è dunque costruito uno spazio *étalé* E_Γ che rappresenta Γ, il cui fascio delle sezioni $\tilde{\Gamma}$ dicesi fascio associato a Γ.

TEOREMA. *Se il prefascio Γ è un fascio, allora $\tilde{\Gamma} = \Gamma$.*

Nella maggior parte dei casi i fasci che intervengono in geometria sono naturalmente muniti d'una struttura algebrica, i $\Gamma(U)$ essendo gruppi, anelli, moduli, ecc. e le applicazioni di restrizione essendo dei morfismi per tali strutture. Un caso fondamentale è evidentemente quello dei fasci di funzioni sulle varietà. Se ad esempio M è una varietà differenziabile (rispettivamente olomorfa), il fascio delle applicazioni differenziabili (rispettivamente olomorfe) $f : U \to \mathbf{R}$ (rispettivamente $f : U \to \mathbf{C}$) ove U è un aperto di M, è un fascio di anelli detto il fascio strutturale di M e denotato $\mathcal{O}_M$. Molte proprietà globali di M si possono «leggere» su $\mathcal{O}_M$.

Se i fasci hanno assunto una cosí grande importanza, ciò dipende dal fatto che offrono un'interpretazione funzionale del passaggio dal locale al globale alla quale si possono trasferire «fibra a fibra» le nozioni fondamentali dell'algebra (cfr. il § 6.2 del citato articolo «Geometria e topologia»).

7.2. Coomologia dei fasci.

Come si è visto a proposito delle fibrazioni localmente triviali, la coomologia a valori in un fibrato di coefficienti è lo strumento fondamentale per misurare le ostruzioni al passaggio dal locale al globale. È dunque naturale cercare di prolungarne la definizione ai fasci; esistono essenzialmente due modi per introdurre la coomologia a valori in un fascio. Uno, detto coomologia di Čech, privilegia il modo in cui la base X è ottenuta per incollamento, mentre l'altro privilegia l'aspetto algebrico del problema. Si tratta poi di confrontarli e di cercare condizioni necessarie e sufficienti (sia relative allo spazio di base sia ai fasci conside-

rati) affinché essi coincidano (teoria delle successioni spettrali) [tali argomenti delicati sono esposti in dettaglio in Godement 1964; si veda anche l'articolo «Invariante» in questa stessa *Enciclopedia*].

La coomologia dei fasci offre uno strumento notevolmente comodo e potente per l'analisi delle proprietà globali degli oggetti geometrici.

8. *L'opposizione locale/globale in aritmetica.*

Dopo aver esposto schematicamente certi aspetti della dialettica locale/globale in geometria, si vedrà perché e come tale dialettica può operare anche in aritmetica ed in modo non metaforico. Questo è chiaramente d'importanza capitale. Infatti a partire dal momento in cui la dialettica locale/globale si rivela immanente ai «substrati» ideali costituiti da un lato dallo spazio e dall'altro dai numeri, tutto fa credere che i metalinguaggi (categoriali) di incollamento sono in certa misura universali e devono perciò avere a che fare con un'immanenza logica. Su questo argomento si tornerà nella conclusione.

8.1. Divisibilità, congruenze e numeri p-adici.

Alcuni tra i problemi piú fondamentali e difficili dell'aritmetica sono i problemi diofantei, consistenti, data un'equazione algebrica $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ a coefficienti interi o razionali, nel trovarne una soluzione intera o razionale. Il piú famoso di tali problemi è senza dubbio la congettura di Fermat, il quale afferma che per $n \geq 3$ l'equazione diofantea $x^n + y^n = z^n$ è priva di soluzioni intere non banali.

Il piú importante metodo di risoluzione delle equazioni diofantee consiste in approssimazioni successive basate sulla nozione di congruenza.

Sia p un numero primo. È noto (si veda il § 5 dell'articolo «Divisibilità» in questa stessa *Enciclopedia*) che l'anello quoziente $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ è un corpo finito di caratteristica p, canonicamente incluso in ogni corpo di caratteristica p. Lavorare in $\mathbf{F}_p$ significa lavorare «modulo p». Se $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ è un'equazione diofantea a coefficienti interi, ad essa verrà associata la sua riduzione modulo p $f_p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ottenuta sostituendo i coefficienti di f con le loro immagini in $\mathbf{F}_p$ e se ne cercheranno le soluzioni in $\mathbf{F}_p$. Si cercherà dunque dapprima di risolvere la congruenza $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}$ che è molto piú semplice del problema iniziale.

Ma la congruenza $f \equiv 0 \pmod{p}$ è un'approssimazione estremamente grossolana dell'equazione diofantea $f = 0$. Si è dunque portati a rendere piú fine tale approssimazione da una parte facendo variare p nell'insieme $\mathcal{P}$ dei numeri primi, dall'altra cercando soluzioni modulo le potenze successive p^s di p. Il problema diventa ovviamente quello di dominare il «passaggio al limite», quando s diventa infinito, di tali approssimazioni sempre piú fini.

Se $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$ è una soluzione intera di $f = 0$, è chiaro che si avrà $f(a_1, \ldots, a_n) \equiv 0 \pmod{p^s}$ per ogni numero primo $p \in \mathcal{P}$ ed ogni $s > 0$. Si tratta di sapere sotto quali condizioni esiste una reciproca. Tale problema è altamente

non banale nella misura in cui le soluzioni possibili di $f \equiv 0 \pmod{p^s}$ (supponendo ch'esistano per ogni $p \in \mathcal{P}$ ed ogni $s > 0$) non hanno a priori alcuna ragione di essere tra loro compatibili.

Uno dei primi grandi risultati in tal campo è il teorema di Minkowski sulle forme quadratiche.

TEOREMA (Minkowski). *Sia $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$ una forma quadratica a coefficienti razionali. Se la congruenza $f \equiv 0 \pmod{p^s}$ ammette una soluzione non banale (ossia diversa da $(0, \ldots, 0)$) per ogni $p \in \mathcal{P}$ e ogni $s > 0$, e se l'equazione $f = 0$ ammette una soluzione reale non banale, allora l'equazione diofantea $f = 0$ ammette una soluzione razionale non banale.*

Si vedrà ora perché tale teorema è paradigmatico del passaggio dal locale al globale in aritmetica. Per questo è utile ricordare la nozione di numero p-adico dovuta a Hensel: si tratta di numeri rappresentati sotto la forma di serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ a coefficienti a_n nel corpo finito $\mathbf{F}_p$ (cfr. il citato articolo «Divisibilità»). Hensel doveva lavorare modulo p^s facendo tendere s all'infinito e doveva dunque riuscire a controllare il «passaggio al limite» delle congruenze modulo p^s. Di qui l'idea di trasportare all'aritmetica il paradigma di approssimazioni successive costituito dallo sviluppo di Taylor, cioè di rappresentarsi la successione delle congruenze modulo p come la successione dei troncamenti successivi d'uno sviluppo infinito. Orbene, se si tiene presente tale analogia non tanto da un semplice punto di vista tecnico quanto da un punto di vista concettuale, si constata subito ch'essa conduce all'idea notevole che un numero intero n sia in certo qual modo una «funzione» sull'«insieme dei punti» costituito dai numeri primi, funzione il cui valore in p è l'immagine di n in $\mathbf{F}_p$ e che la serie di Taylor, la quale esprime la sua struttura «locale» nell'«intorno» di p, sia lo sviluppo p-adico di n.

Dalla pubblicazione dei lavori pionieristici di Hensel questa immissione di un paradigma geometrico nell'aritmetica si è notevolmente chiarificata. Si consideri la successione di quozienti $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$. Essa costituisce un sistema proiettivo $\ldots \to \mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p^{s-1}\mathbf{Z} \to \ldots \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} = \mathbf{F}_p \to 0$.

DEFINIZIONE. *L'anello $\mathbf{Z}_p$ degli interi p-adici è il limite proiettivo di questo sistema.*

Questa definizione equivale alla seguente: se n è un intero, ogni numero primo p interviene con un certo esponente (in generale nullo) nella decomposizione di n in fattori primi. Quest'esponente dicesi valutazione di n in p e si denota $v_p(n)$. Se $v_p(n) = 0$, n è primo con p. Se si pone per convenzione $v_p(0) = +\infty$, è facile verificare che la valutazione p-adica v_p soddisfa le due proprietà fondamentali:

$$(1) \qquad v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y) \qquad\qquad (x, y) \in \mathbf{Z}$$

$$(2) \qquad v_p(x+y) \geq \operatorname{Inf}(v_p(x), v_p(y))$$

Ciò implica che l'applicazione che ad $n \in \mathbf{Z}$ associa il numero $|n|_p = \exp(-v_p(n))$ è una norma su $\mathbf{Z}$, detta norma p-adica soddisfacente a una disuguaglianza piú stretta della disuguaglianza triangolare, la disuguaglianza ultrametrica

$$(3) \qquad |x+y|_p \leq \mathrm{Max}(|x|_p, |y|_p).$$

Osservazione: La proprietà d'ultrametricità non è affatto intuitiva, giacché essa non è archimedea. Per la norma p-adica i multipli di un numero n sono di norma inferiore a quella di n, mentre per la norma standard (valore assoluto) sono di norma superiore.

TEOREMA. *L'anello $\mathbf{Z}_p$ degli interi p-adici è il completamento di* $\mathbf{Z}$ *per la norma p-adica.*

Se si passa ora da $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{Q}$ è facile estendere la valutazione p-adica ponendo $v_p(n/m) = v_p(n) - v_p(m)$. Ciò definisce la norma p-adica $|\ \ |_p$ di $\mathbf{Q}$ e il completamento di $\mathbf{Q}$ per $|\ \ |_p$ dicesi corpo $\mathbf{Q}_p$ dei numeri p-adici. $\mathbf{Z}$ s'identifica con un sottoanello denso di $\mathbf{Z}_p$ e $\mathbf{Q}$ con un sottocorpo denso di $\mathbf{Q}_p$ (che ha dunque caratteristica 0).

Questa descrizione dei numeri p-adici in termini di valutazioni e di norme è capitale poiché si può dimostrare che le *sole* norme su $\mathbf{Q}$ sono la norma standard (valore assoluto) e le norme p-adiche. Ciò permette di precisare in che senso i numeri primi sono i «punti» di uno «spazio substrato» sul quale i numeri diventano «funzioni». Questo spazio substrato ideale E, proprio dell'aritmetica di $\mathbf{Q}$, è costituito dai punti – chiamati anche *posti* di $\mathbf{Q}$ – che sono le valutazioni ultrametriche v_p per $p \in \mathcal{P}$ (posti finiti) e il valore assoluto (posto «all'infinito»). $\mathbf{Q}$ è un'entità globale associata a questo spazio substrato E. Ciò permette di capire in che senso il teorema di Minkowski è in definitiva un teorema di passaggio dal locale al globale.

TEOREMA (Minkowski). *Sia f una forma quadratica su* $\mathbf{Q}$. *Se $f=0$ ammette una soluzione non banale su* $\mathbf{R}$, *e se, per ogni $p \in \mathcal{P}$, $f=0$ ammette una soluzione non banale su $\mathbf{Q}_p$, allora $f=0$ ammette una soluzione non banale su* $\mathbf{Q}$. *In altri termini, se $f=0$ ammette in ogni posto di* $\mathbf{Q}$ *una soluzione locale essa ammette una soluzione globale.*

8.2. Legge di reciprocità, adeli, ideli.

Per estendere il teorema di Minkowski al caso di un corpo di numeri algebrici qualunque, Hilbert ha riformulato la legge di reciprocità quadratica di Légendre-Gauss (discussa alla p. 129 del citato articolo «Dualità») come teorema di passaggio dal locale al globale; per dimostrare tale teorema egli ha ritrovato il problema dei corpi di classe posto da Weber: si tratta di un esempio particolarmente luminoso di ciò che Jean Dieudonné chiama l'unità della matematica moderna.

Rimandando al § 1.3 del citato articolo «Dualità» e al § 5 di «Divisibilità» per ulteriori dettagli, si ricordi solo che è proprio la localizzazione dei corpi di classe alla base della introduzione delle nozioni di ideli ed adeli. L'importanza dell'introduzione dei gruppi di ideli e di adeli proviene dal fatto che essi sono naturalmente muniti d'una struttura di gruppo topologico localmente compatto. Si possono dunque applicare loro i risultati dell'analisi armonica e generalizzare cosí in un quadro unitario le tecniche analitiche introdotte da Dirichlet e Riemann in aritmetica (teoria delle funzioni zeta e delle funzioni L).

9. *La sintesi della geometria algebrica.*

La geometria algebrica moderna è la sintesi di molti punti di vista. Anzitutto essa continua le ricerche (dovute essenzialmente alla scuola italiana) per generalizzare i risultati di Riemann in dimensione superiore (cfr. l'articolo «Curve e superfici»). Inoltre essa cerca di trasportare a livello algebrico le tecniche e i concetti propri del livello analitico e ciò in modo astratto, valido per ogni corpo di base, cioè non limitandosi ad utilizzare il fatto che nel caso della geometria algebrica su $\mathbf{C}$, il livello analitico è sempre soggiacente al livello algebrico. Infine essa cerca, soprattutto dopo i lavori di André Weil, di prolungare il punto di vista di Dedekind-Weber integrando le questioni aritmetiche.

I suoi strumenti essenziali sono da un lato l'algebra commutativa che traduce in termini algebrici i concetti fondamentali della geometria e permette di controllarli con il calcolo (punto di vista introdotto da Hilbert e sviluppato soprattutto da Noether e Zariski) e d'altro lato (soprattutto dopo i lavori di Grothendieck) il linguaggio categoriale della coomologia dei fasci.

La sintesi effettuata in geometria algebrica è straordinaria sia per la diversità delle tecniche sia per l'unità dei metodi. Si può dire che per sua stessa natura la geometria algebrica si situa al crocevia della matematica contemporanea. Sarebbe completamente utopico pensare di presentarne gli elementi in qualche pagina, anche solo quelli che si riferiscono all'algebrizzazione della dialettica locale/globale e del concetto d'incollamento. Ecco perché per un panorama di tali risultati si rinvia da un lato agli articoli specifici di questa stessa *Enciclopedia* via via indicati e dall'altro al trattato ormai classico di Dieudonné [1974].

10. *Conclusione.*

Per concludere questa incursione nel campo dei diversi aspetti dialettici dell'opposizione locale/globale si ritorna ora sul problema del linguaggio, della sua sintassi e della sua semantica. Uno degli apporti epistemologici piú significativi dell'approfondimento matematico delle molteplici connessioni fra le operazioni di localizzazione e di globalizzazione pare, a chi scrive, essere la possibilità di riformulare il problema teorico della lingua. Se si tiene conto del fatto che il problema posto dall'implicazione reciproca fra la lingua e l'intuizione spaziale è uno dei piú antichi problemi filosofici, appare di estremo interesse capire

perché e come le «geometrie» associate all'opposizione locale/globale possano sfociare in problemi di semantica e di grammatica.

Poiché si tratta di problematiche in larga parte inesplorate, ci si limiterà solo ad alcune considerazioni di carattere generale. Si vuole unicamente sottolineare come esistano attualmente *due* approcci che paiono promettenti. Uno di essi – dovuto essenzialmente a Lawvere e Tierney — fa sfociare nella logica i metalinguaggi dell'incollamento introdotti da Grothendieck nella teoria degli schemi. L'altro – quello della teoria delle catastrofi – fa sfociare nella schematizzazione delle strutture sintattiche elementari (sia grammaticali sia semantiche) la teoria delle singolarità differenziabili e dei loro dispiegamenti. Risulta dunque che tutti e due i punti culminanti della dialettica locale/globale – quello della sintesi fra il punto di vista di Riemann e l'aritmetica, e quello del «programma di Thom-Smale» – «riconducono» la geometria alla sintassi, allacciandosi in modo specifico ad uno dei due aspetti fondamentali del problema, il primo sugli automatismi logico-sintattici di iterazione, il secondo sugli archetipi morfologici ai quali tali automatismi si applicano. Per ora si tratta solo di una constatazione un po' enigmatica. Tuttavia l'autore del presente articolo ritiene che forse dietro di essa si profila una revisione profonda del nostro modo classico di concepire i rapporti tra linguaggio e realtà.

10.1. Logica e teoria dei topoi.

Come si è visto, un prefascio su uno spazio topologico X è un funtore controvariante della categoria piccola $\mathfrak{M}$ degli aperti di X nella categoria degli insiemi. Si può dunque generalizzare tale nozione a una categoria $\mathfrak{M}$ qualunque. Per poter allora parlare di fascio e cioè di prefascio che soddisfa le condizioni di incollamento (F_1) e (F_2), basta disporre in $\mathfrak{M}$ di una nozione di ricoprimento aperto. Per questo non è affatto necessario che $\mathfrak{M}$ sia la categoria degli aperti di uno spazio topologico; infatti i ricoprimenti aperti $\mathcal{R}(U)$ degli aperti U di uno spazio topologico X sono caratterizzati dalle proprietà fondamentali:

a) $1_U : U \to U \in \mathcal{R}(U)$.
b) Se $(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}(U)$ e $(U_{ij})_{j\in \mathcal{J}_i} \in \mathcal{R}(U_i)$ per ogni $i \in I$, allora $(U_{ij})_{i\in I,\, j\in \mathcal{J}_i} \in \mathcal{R}(U)$.
c) Se $(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}(U)$ e se $V \to U$, allora $(U_i \cap V)_{i\in I} \in \mathcal{R}(V)$.

Nella categoria $\mathfrak{M}$ degli aperti di X, l'intersezione di due aperti U_i e V di U è semplicemente il prodotto fibrato $U_i \underset{U}{\times} V$ e la nozione di prodotto fibrato è puramente categoriale. Se $\mathfrak{M}$ è una qualunque categoria che ammette prodotti fibrati, si può allora definire una topologia su $\mathfrak{M}$ (detta topologia di Grothendieck) associando ad ogni oggetto U di $\mathfrak{M}$ un insieme $\mathcal{R}(U)$ di famiglie di morfismi $(U_i \to U)_{i\in I}$ dette famiglie ricoprenti che verificano la traduzione categoriale degli assiomi *a*), *b*) e *c*). Una categoria munita di una topologia di Grothendieck è detta sito. I siti sono, per definizione, i «substrati» dei fasci e ciò permette di generalizzare in modo notevole le tecniche coomologiche della teoria dei fasci.

DEFINIZIONE. *La categoria dei fasci su un sito è detta topos.*

La possibilità di applicare questo concetto generale dei fasci a situazioni astratte deriva da un teorema di Jean Giraud che caratterizza categorialmente i topoi fra le categorie.

I due esempi essenziali di topoi sono forniti da un lato dalla categoria $\mathfrak{S}$ degli insiemi e, dall'altro, dalla categoria dei fasci $\mathcal{F}_T$ su uno spazio topologico T. Si tratta naturalmente di topoi molto diversi. L'osservazione fondamentale di Lawvere è che la logica dei predicati della teoria degli insiemi può essere completamente riformulata in termini categoriali a partire dalla struttura di topos di $\mathfrak{S}$. Di qui l'idea veramente profonda di considerare ogni topos come l'ambito naturale di una «logica interna» ad esso canonicamente associata. Passando dalla categoria degli insiemi $\mathfrak{S}$ alle categorie dei fasci su spazi topologici, si può estendere in modo cospicuo la nozione di linguaggio logico. Si può cosí formulare quello che vi è di troppo «rigido» nella teoria classica degli insiemi. Come osserva Lawvere [1972, pp. 3, 4], «il topos piú "astratto" è la usuale categoria degli insiemi $\mathfrak{S}$ e delle applicazioni nella quale, per cosí dire, lo sviluppo [degli insiemi] è stato congelato in modo che i morfismi $X \to Y$ siano interamente determinati da come operano sugli elementi "globali" od "eterni" di X... Non essendovi qui alcuno sviluppo negli oggetti di $\mathfrak{S}$, non vi è alcun impedimento all'esistenza di funzioni di scelta, ed anzi in un certo senso l'assioma di scelta caratterizza i modelli della teoria degli insiemi fra i topoi». Per contro, se si considerano i topoi che sono categorie di fasci su uno spazio topologico oppure categorie di prefasci su quelle categorie particolari che sono gli insiemi preordinati, si può ad esempio localizzare la quantificazione («è localmente vero che») oppure far variare la nozione di verità in funzione degli «stadi del sapere» (semantica intuizionista dei mondi possibili). Come osserva ancora Lawvere [*ibid.*, p. 3], «si può dire in conclusione che la nozione di topos sintetizza in forma oggettiva categoriale l'essenza "delle logiche di ordine superiore"... senza assioma di estensionalità. Tale fatto conduce ad una naturale e utile generalizzazione della teoria degli insiemi consistente negli "insiemi che si sviluppano internamente". In un fondamentale esempio della geometria algebrica lo sviluppo può pensarsi avvenire lungo un parametro che varia sugli "anelli di definizione"; in un fondamentale esempio della logica intuizionista, il parametro è interpretato come variante negli "stadi del sapere"».

10.2. Teoria delle catastrofi e ipotesi localista.

Alcune ricerche recenti fanno presumere che la teoria dei topoi offra un ambito naturale per comprendere gli automatismi sintattici delle lingue naturali. Tuttavia il fenomeno linguistico non si riduce al livello della generatività grammaticale. Esso include almeno due altri livelli: 1) quello semantico; 2) quello delle morfologie sintattiche elementari di base che servono di ingresso agli automi generativisti.

Il problema della semantica è troppo vasto per essere affrontato in questa

sede. Passando allora al punto 2), il problema posto dall'esistenza di un nucleo di morfologie sintattiche archetipe che servano di ingresso alle trasformazioni sintattiche è apparentemente molto semplice ma incappa in notevoli difficoltà di *modellizzazione*. In breve si tratta del seguente problema. Tutto porta a credere che esistano, a livello delle strutture linguistiche profonde, degli schemi elementari di interazioni attanziali aventi carattere universale. La manifestazione linguistica superficiale di questi schemi è l'esistenza di casi (nominativo, accusativo, dativo, ecc.) caratterizzati da desinenze, come in latino, oppure da preposizioni, come nella maggior parte delle lingue europee. Appare dunque naturale supporre che, al di là della diversità degli indicatori dei casi, specifici di ogni lingua, esista un nucleo di casi profondi e universali. Che cosa è un caso profondo? A priori si deve asserire che si tratta di un *posto* in uno schema d'interazione di posti. Per esempio il verbo 'dare' lessicalizza in italiano uno schema d'interazione fra tre posti: quello del destinatore (nominativo), quello del destinatario (dativo) e quello dell'oggetto trasmesso (accusativo). Numerosi lavori hanno mostrato che esistono ben pochi schemi elementari universali d'interazione e che *a*) tali schemi paiono aver fornito le «matrici» della struttura casuale di tutti i verbi; *b*) tali schemi sembra operino sia a livello strettamente grammaticale sia a livello (semantico) delle cosiddette strutture narrative.

Il problema diviene allora quello di modellizzare, o meglio di dedurre da principî generali, schemi d'interazione casuali astratti, corrispondenti al nucleo evidenziato dagli approcci casuali (Tesnière, Fillmore, Anderson, ecc.). Si tratta di una questione assai delicata, giacché non si può assimilare una relazione casuale a una relazione nel senso logico del termine e partire da relazioni binarie di base per costruire, mediante combinazioni, relazioni piú complesse. La nozione di relazione casuale è una nozione per la quale l'opposizione semplice/complesso è non pertinente. Certamente fenomeni linguistici quali l'esistenza degli incoativi mostrano come alcune interazioni casuali possano ridursi ad interazioni piú semplici. Ciò non toglie però che a un altro livello ogni interazione casuale elementare (cioè lessicalizzabile con un unico verbo) sia irriducibile. D'altro lato se si trasformassero le relazioni casuali in relazioni logiche, nulla impedirebbe di renderle a mano a mano piú complicate. È tuttavia un fatto di ovvia esperienza (e linguisticamente universale) che la «valenza» dei verbi (secondo la metafora chimica usata da Tesnière per immaginare il numero di posti casuali articolati da un nodo verbale) è fortemente limitata (circa 4).

In conclusione si può dire che il problema posto dall'esistenza di un nucleo di schemi astratti di interazioni casuali ha quattro aspetti:

1) capire come tali interazioni possano essere congiuntamente riducibili ed irriducibili;
2) capire a cosa è dovuta la loro pregnanza (universalità);
3) capire perché la loro complessità è fortemente limitata;
4) capire come esse hanno potuto servire da «matrici» e «catturare» tutte le morfologie sintattiche elementari.

Fin dall'epoca dei grammatici della scuola di Bisanzio si è sovente ipotizzato che per risolvere tale quadruplice problema si doveva assolutamente tenere conto delle possibili interazioni spaziali tra attanti concreti. Tale ipotesi, detta ipotesi localista, significa che ogni caso è passibile di una doppia interpretazione: una propriamente grammaticale e l'altra locale, cioè spaziale. Fino ad ora però tale ipotesi – la cui storia è splendidamente narrata nel classico *La catégorie des cas* di Hjelmslev [1935-37] – non ha mai potuto essere convalidata formalmente e con ciò stesso fondata. In effetti l'ipotesi localista cerca di dare un senso rigoroso alla nozione di colocalizzazione dei posti articolati da un centro organizzatore (nodo verbale). Ciò presuppone però che si sappia formalizzare il conflitto fra posti, ossia il processo dialettico di unione e di differenziazione dei posti in uno schema d'interazione. È chiaro infatti che «l'identità» dei posti non può provenire dai posti stessi ma solo dal loro rapporto dialettico.

A questo punto interviene il paradigma catastrofista. La teoria delle catastrofi è la prima teoria adattata a problemi del tipo di quelli posti dall'ipotesi localista, giacché essa fornisce i primi modelli di conflitto dialettico e classifica le interazioni elementari archetipe fra attanti spaziali. Esiste una interpretazione sintattica delle catastrofi elementari [descritta alla fine di Thom 1972 ed utilizzata a scopi semantici in Petitot 1977] la quale fornisce una deduzione a priori (si potrebbe anzi dire trascendentale) degli universali casuali. La teoria delle singolarità s'innesta cosí, in modo imprevisto, sulla linguistica, fornendo una risposta profonda e coerente ai punti 1)-4).

A partire da alcune osservazioni generiche sulla semantica, si è attraversato l'universo dei vari aspetti matematici dell'opposizione locale/globale per concludere sulle difficoltà inerenti alla schematizzazione delle forme linguistiche. La possibilità di percorsi epistemologici di questo tipo è la premessa di un nuovo tipo di implicazione fenomenologica della matematica che, forse, permetterà di trasformare in modo profondo il nostro rapporto con la scienza. Qualunque ne sia lo sviluppo, è però evidente che l'opposizione locale/globale deve d'ora in poi essere considerata come una delle categorie fondamentali della ragion pura. [J. P.].

Adams, F.
1962 *Vector fields on spheres*, in «Annals of Mathematics», LXXV, pp. 603-32.

Appelgate, H., e Tierney, M.
[1966-67] *Categories with Models*, in *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory*, Springer, Berlin - New York 1969, pp. 156-244.

Dieudonné, J.
1974 *Cours de géométrie algébrique*, Presses Universitaires de France, Paris.
1977 *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique*, Gauthier-Villars, Paris.

Eco, U.
1975 *Trattato di semiotica generale*, Bompiani, Milano.

Godement, R.
1964 *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris.

Golubitsky, M., e Guillemin, V.
1973 *Stable Mappings and their Singularities*, Springer, Berlin - New York.
Hatcher, A., e Wagoner, J.
1973 *Pseudo-Isotopies of Compact Manifolds*, in «Astérisques», n. 6.
Hjelmslev, L.
1935-37 *La catégorie des cas. Etude de grammaire générale*, in «Acta Jutlandica», VII, 1, e IX, 2.
Lawvere, F. W.
1972 (a cura di) *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, Springer, Berlin - New York.
Petitot, J.
1977 *Topologie du Carré sémiotique*, in «Etudes littéraires», X, pp. 347-428.
Poenaru, V.
1974 *Analyse différentielle*, Springer, Berlin - New York.
Roussarie, R.
1975 *Modèles locaux de champs et de formes*, in «Astérisques», n. 30.
Steenrod, N.
1951 *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton N.J.
Thom, R.
1972 *Stabilité structurelle et morphogénèse. Essai d'une théorie générale des modèles*, Benjamin, Reading Mass.
1978 *Morphogénèse et imaginaire*, in «Circé. Cahiers de recherche sur l'imaginaire», n. 8-9, pp. 7-90.
Weyl, H.
1955 *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner, Stuttgart.

Comparsa all'interno delle **matematiche** (cfr. anche **catastrofi, differenziale, funzioni, geometria e topologia, invariante, spettro**), l'opposizione locale/globale (cfr. **opposizione/contraddizione**) ha assunto una portata generale nell'ambito della filosofia (cfr. **filosofia/filosofie**) e della **scienza.** Nella filosofia essa permette di enunciare in modo nuovo e di proporre soluzioni originali a numerosi problemi (cfr. **coppie filosofiche**), come quello del tutto e delle parti (cfr. **totalità, dialettica**), degli **universali/particolari**, dell'unità e molteplicità (cfr. **uno/molti**). Nelle teorie (cfr. **teoria/modello**) della **conoscenza**, l'opposizione locale/globale è presente in modo particolare in quanto problema dell'**induzione/deduzione**; essa si può reperire anche nella **semantica** e in generale ovunque si ponga il problema del **significato** (cfr. **senso/significato**). Nella scienza ci s'imbatte in questa opposizione non appena si affronti il problema delle leggi (cfr. **legge**) scientifiche e quello del determinismo (cfr. **determinato/indeterminato**); essa inoltre è al centro della cosmologia contemporanea (cfr. **cosmologie, universo, spazio/tempo**; e ancora: **astrologia, astronomia, mondo, natura, caos/cosmo, ordine/disordine**).

Sistemi di riferimento

La nozione di sistema di riferimento è d'importanza fondamentale sia per la matematica sia per la fisica. Essa è però divenuta talmente ovvia che spesso si dimentica che è tra le piú ricche e feconde della geometria. Se può essere al tempo stesso cosí basilare eppure cosí ovvia, è perché si tratta di una nozione che non concerne direttamente la realtà dei fenomeni, bensí *le condizioni di possibilità della descrizione dei fenomeni stessi*, e la caratteristica delle grandi *teorie* è la possibilità di dedurre una parte importante della *realtà* dei fenomeni dallo studio matematico approfondito delle condizioni di possibilità della loro descrizione.

Se ci si proponesse un'esposizione esaustiva di questa nozione proteiforme, si dovrebbe ripercorrere tutto il sapere matematico e quello fisico poiché non vi è praticamente alcun dominio di tali scienze in cui essa non intervenga in maniera costitutiva. Una simile esposizione sarebbe dunque un doppione di molti altri articoli di quest'*Enciclopedia* ai quali si farà a mano a mano cenno, senza ulteriori specificazioni, in questo articolo, in cui ci si limiterà a riesaminare, in modo lacunoso ed incompleto sia a livello fisico-matematico sia a livello storico, solo alcuni aspetti della problematica del riferimento.

1. *La necessità del riferimento.*

Il verbo 'riferire' si usa tanto nella forma transitiva ('riferire qualcosa') quanto in quella riflessiva ('riferirsi'). In entrambi i casi inquadra un problema di *posizione*, una strategia finalizzata a *definire un posto*. Il suo contesto generale è perciò caratterizzato dall'esistenza di uno spazio E («substrato» delle posizioni e dei posti possibili), di un oggetto O (l'oggetto cui si vuole assegnare una posizione) e di un soggetto S (agente della strategia di ricerca).

A partire da questo contesto generale, si possono distinguere tre tipi empirici di situazione di riferimento, tra loro radicalmente diversi:

1) Anzitutto vi è il caso in cui E è uno spazio *contrassegnato*, reso eterogeneo da punti o da zone *fenomenologicamente distinguibili*. La strategia consisterà allora essenzialmente nel «reperire» tali punti di riferimento. Per fare ciò occorre che il soggetto S abbia una visione relativamente *globale* dello spazio E.
2) Vi è poi il caso in cui il soggetto S non può disporre d'una visione relativamente *globale* dello spazio E, a prescindere dal fatto che lo spazio E sia o non sia contrassegnato ossia che esistano o meno punti di riferimento. In tal caso il soggetto diventa «miope», non potendo che riferirsi localmente, cioè rispetto a ciò che gli sta attorno, a breve distanza, e non rispetto a tutto lo spazio E. Una tale situazione potrebbe chiamarsi *labi-*

rintica. La strategia di riferimento presuppone in tal caso una strategia di uscita dal labirinto (cfr. «Centrato/acentrato», «Labirinto»).

3) Vi è infine il caso in cui il soggetto è dotato di una visione globale dello spazio E (cioè trattasi di un osservatore), in cui però lo spazio E è «non-contrassegnato», non possiede cioè punti di riferimento, è uno spazio omogeneo. Questo è il caso di un navigatore su un oceano, oppure di chi percorre un deserto.

Quest'ultima situazione è alla base della nozione di sistema di riferimento. Infatti è proprio nel caso in cui, essendo E uno spazio omogeneo, l'osservatore non dispone di alcun punto di riferimento *inerente* ad E, che si rende necessario l'uso di un riferimento nel senso di un sistema di coordinate.

2. *La fecondità concettuale della nozione di riferimento.*

Se si volessero valutare le radici antropologiche, culturali, rappresentative e simboliche della nozione di riferimento bisognerebbe rintracciare in tutta la sua complessità fenomenologica e la sua densità storica la conquista del concetto di spazio a ciò che Husserl chiamava la *Lebenswelt*. Si sarebbe cosí condotti da un lato all'analisi antropologica della rappresentazione dello spazio nelle diverse culture (in particolare nelle società primitive in cui lo spazio è locale e simbolicamente strutturato dall'opposizione sacro/profano: cfr. «Religione», «Puro/impuro», «Sacro/profano»), dall'altro all'analisi della sua genesi psicologica, come anche all'analisi della *desemantizzazione* cosmologica dello spazio (passaggio dall'astrologia all'astronomia) e all'analisi dell'equivalenza, a suo tempo rivoluzionaria, dello spazio celeste e dello spazio sublunare, nonché all'analisi dei rapporti tra spazio pittorico prospettico e rappresentazione topografica delle relazioni narrative, all'analisi della cartografia, ecc. Tutti questi problemi, cosí delicati, sono stati profondamente e largamente dibattuti; si potrà far riferimento a due esempi classici: l'opera di Koyré *From the Closed World to the Infinite Universe* [1957] e la summa impressionante di Duhem [1913-16] (cfr. anche «Infinito», «Mondo» e «Universo»).

2.1. Le coordinate cartesiane.

Allorché si delinea il problema di fornire un riferimento in uno spazio omogeneo, cioè privo di punti di riferimento, cioè di punti fenomenologicamente distinti, la nozione di sistema di coordinate diventa necessaria. Supponendo che lo spazio E sia munito di struttura *euclidea*, è possibile definire i riferimenti come i sistemi massimali di n rette passanti per un medesimo punto, a due a due ortogonali (riferimenti cartesiani). Se si assumono poi delle unità di misura su ciascun asse, ogni punto x di E diventa «riferito» rispetto ad un tale riferimento cartesiano R dando le sue n coordinate $(x_1, x_2, ..., x_n)$ cioè assegnando una n-pla ordinata di numeri reali. Grazie a tale procedimento, E è posto in corrispondenza biunivoca con un modello base standard, ossia il prodotto diretto $\mathbf{R}^n$ di n esemplari della retta reale $\mathbf{R}$, il quale, contrariamente ad E, è munito di un sistema di riferimento *canonico*, cioè quello composto dai vettori $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (con il numero 1 nella i-esima posizione), $i = 1, ..., n$.

Non s'insisterà mai a sufficienza sulla rottura provocata dall'introduzione delle coordinate cartesiane. Essa è all'origine di *tutta* la geometria algebrica e differenziale moderna (cfr. del resto «Geometria e topologia»). Eccone subito alcune conseguenze le cui diramazioni sono divenute sostanzialmente coestensive al campo geometrico.

Sia R un riferimento cartesiano di E. Il fatto che ogni punto x di E divenga, mediante R, «codificato» da una n-pla ordinata di numeri reali permette d'introdurre delle descrizioni *algebriche*; ciò significa immergere la geometria in quella rivoluzione dell'ordine *simbolico* ch'è stata il perno dello sviluppo dell'algebra. Allorché si dispone della nozione di *variabile* si può dire che un punto x di E è rappresentato dai valori delle n variabili $x_1, x_2, ..., x_n$. Avendo poi a disposizione la nozione di *funzione* si può affermare che un «luogo» di E (cioè l'insieme dei punti di E soddisfacenti a certe proprietà o generati applicando una certa regola) è rappresentato da un certo numero di equazioni $f(x_1, ..., x_n) = 0$. Disponendo infine delle nozioni di *differenziazione* si possono tradurre le proprietà infinitesimali (in particolare tangenziali) dei «luoghi» di E. Cosí, attraverso le nozioni cruciali di variabile, di funzione, di derivata e di differenziale si è spalancato l'immenso universo del trattamento simbolico degli oggetti geometrici di E. Ciò ha permesso non solo di riesprimere e di risolvere con metodi *uniformi* (come quelli, ad esempio, dell'eliminazione) i problemi classici della geometria euclidea, ma ha permesso anche di aprire orizzonti radicalmente nuovi la cui investigazione metodica e concettuale è ben lungi dall'essere compiuta.

La «codificazione» dei «luoghi» di E mediante sistemi di equazioni $f(x_1, ..., x_n) = 0$ vincolerà irreversibilmente una parte della geometria alle funzioni «calcolabili», cioè alle funzioni il cui valore può essere calcolato con applicazioni successive di operazioni algebriche di base. Tali funzioni sono le funzioni *polinomiali*. Sia A l'anello dei polinomi in n variabili su $\mathbf{R}$, $A = \mathbf{R}[x_1, ..., x_n]$. Se P è un elemento di A e R un sistema di riferimento cartesiano di E, è possibile associare ad ogni punto $x = (x_1, ..., x_n)$ di E il valore $P(x)$ di P in x. Si possono dunque considerare i sottoinsiemi V di E definiti dall'annullarsi di un sistema $P_1, ..., P_k$ di polinomi. Un tale sottoinsieme si dice *algebrico* e la nozione di insieme algebrico è la nozione primitiva della geometria algebrica (cfr. «Geometria e topologia», «Curve e superfici», «Invariante»).

Assegnare un sistema di riferimento è una condizione che rende possibile la descrizione simbolica degli oggetti geometrici, ma tale condizione è *estrinseca*. È a priori evidente che gli oggetti geometrici di E sono indipendenti dalla scelta di ogni sistema di riferimento o anche (punto di vista complementare) che, se sono dati un oggetto X di E e un cambiamento di riferimento $R \to R'$ e se si considera l'oggetto X' con una descrizione rispetto ad R' identica a quella di X rispetto ad R, allora X e X' sono oggetti equivalenti. Tale evidenza a priori

porta al problema della *classificazione* degli oggetti della stessa natura, in particolare a quello della classificazione degli insiemi algebrici definiti da un'equazione $P(x)=0$ di grado d fissato (coniche o cubiche nel piano, quadriche nello spazio tridimensionale, ecc.). Come si vedrà meglio piú avanti, quest'idea d'invarianza per cambiamenti di riferimento è fondamentale poiché *genera gli oggetti* e si trova all'origine del principio fisico di *relatività* (cfr. del resto l'omonimo articolo).

2.2. Alcuni tipi di coordinate.

La nozione di riferimento cartesiano è l'esempio originario di sistema di coordinate. Ma la nozione di sistema di coordinate ha subito nel corso della storia sviluppi, diversificazioni e generalizzazioni considerevoli. Ne verranno ora citate alcune aventi livelli concettuali molto diversi fra loro.

Sia R un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo E, ad esempio il piano. Le famiglie di rette aventi rispettivamente equazioni $x=a$ e $y=b$ (ove x e y sono le coordinate rispetto a R) formano un sistema (o «rete») di curve ortogonali. Per ogni punto di E passa una e una sola curva di ogni famiglia e queste due curve s'intersecano ortogonalmente in tale punto. Piú in generale, un sistema composto da due famiglie di curve intersecantisi trasversalmente, dipendenti ciascuna da un parametro e ricoprenti ciascuna tutto il piano, può essere considerato come un sistema di coordinate: le coordinate di un punto sono i rispettivi valori dei parametri di ogni famiglia per l'unica curva della famiglia che passa per quel punto. Un esempio standard di un tale sistema è dato dalle coordinate *polari* (r, ϑ) del piano associate al sistema dei cerchi centrati nell'origine e delle rette passanti per l'origine. Si noti che tale sistema ammette l'origine come punto «singolare», poiché la coordinata angolare è ivi indeterminata. Nello spazio a tre dimensioni, si hanno le coordinate cilindriche ottenute aggiungendo alle coordinate polari del piano una coordinata cartesiana per la terza dimensione; altro esempio si ha con le coordinate di Eulero date dal sistema di sfere centrate nell'origine e, su ognuna di tali sfere, delle coordinate angolari «geografiche» di longitudine e latitudine.

La nozione di riferimento cartesiano è legata alla struttura euclidea degli spazi considerati. È noto però che, per ottenere risultati generali sugli insiemi algebrici, si è stati condotti da un lato ad aggiungere i punti all'infinito (proiettivizzazione), e dall'altro a considerare i punti a coordinate complesse. Nella geometria proiettiva complessa del XIX secolo si sono affrontati due punti di vista radicalmente opposti. Da una parte quello della geometria detta «sintetica» che rifiutava ogni algebrizzazione mediante l'uso di coordinate, dall'altra quello della geometria algebrica che voleva adattare a questa nuova struttura le tecniche proprie della geometria cartesiana. Questo secondo punto di vista si è sviluppato grazie all'introduzione delle coordinate *omogenee* da parte di Möbius, Plücker e Cayley.

Si considerino ad esempio, in un piano euclideo E, tre punti u_1, u_2 e u_3 non allineati. Siano essi dotati di «masse» m_1, m_2 ed m_3 e se ne consideri il baricentro C. Se $R=(x, y)$ è un sistema di riferimento cartesiano di E, le coordinate cartesiane x_c ed y_c di C sono date dalle formule:

$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} \qquad y_c=\frac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}.$$

Möbius ha battezzato m_1, m_2, m_3 coordinate baricentriche di C. È facile verificare che

1) facendo variare le «masse» m_1, m_2, m_3 si possono generare tutti i punti di E ed i punti all'infinito soddisfano alla condizione $m_1+m_2+m_3=0$;
2) fissato C, le sue coordinate baricentriche sono definite a meno di un fattore di proporzionalità $k\neq 0$.

L'inconveniente di tale definizione è ch'essa presuppone di aver fissato un sistema di riferimento cartesiano in E, mentre la struttura proiettiva di un piano proiettivo è una struttura piú debole di quella affine d'un piano affine che vi è immerso. Si può rimediare a questo inconveniente identificando il piano proiettivo $\mathbf{P}^2$ con l'insieme delle rette di $\mathbf{R}^3$ passanti per l'origine e private dell'origine stessa. Viene cosí definito un punto di $\mathbf{P}^2$ mediante una terna (X, Y, T) di tre coordinate dette *omogenee* le quali *a*) non sono mai tutte e tre nulle, ed inoltre *b*) sono definite a meno di un comune fattore di proporzionalità $k\neq 0$. Se $T\neq 0$, si può allora associare alla terna (X, Y, T) il punto di un piano cartesiano E di coordinate, rispetto a un sistema di riferimento R, $x=X/T$, $y=Y/T$. Se (kX, kY, kT), $k\neq 0$, è un'altra terna di coordinate omogenee per lo stesso punto di $\mathbf{P}^2$, il punto di E che corrisponde a tale terna è proprio il medesimo poiché

$$\frac{kX}{kT}=\frac{X}{T} \qquad \frac{kY}{kT}=\frac{Y}{T}.$$

Si ottiene cosí una biiezione tra E e il complementare in $\mathbf{P}^2$ della «retta all'infinito» di equazione $T=0$.

Se allora $P(x, y)=0$ è l'equazione di una curva algebrica C di E, ad essa si può canonicamente associare un'equazione *omogenea* atta a definire una curva algebrica proiettiva C' che prolunga C in $\mathbf{P}^2$. Se ad esempio C è una conica di equazione $ax^2+by^2+c=0$, le si associa l'equazione $a(X/T)^2+b(Y/T)^2+c=0$, ossia l'equazione omogenea $aX^2+bY^2+cT^2=0$.

In altri termini, la geometria algebrica proiettiva in $\mathbf{P}^n$ è l'analisi degli insiemi algebrici definiti mediante polinomi *omogenei* dell'anello dei polinomi $\mathbf{C}[X_0, X_1, ..., X_n]$.

Ma la nozione di sistema di coordinate è di portata ben piú generale. Essa interviene infatti ogniqualvolta si voglia rappresentare un'entità dipendente da certi parametri come un *punto* di uno «spazio» di dimensione corrispondente. Per questo tale nozione è legata all'enorme generalizzazione del concetto di spazio che s'è prodotta nel corso del XIX secolo. Eccone qualche esempio.

In meccanica un sistema di N punti materiali può essere rappresentato da un punto di uno spazio a $3N$ dimensioni e, se questi punti sono vincolati da condizioni, da un sottospazio di tale spazio. Nella teoria di Fourier una funzione periodica può essere considerata un punto di uno spazio funzionale di dimensione infinita e i suoi coefficienti di Fourier diventano, secondo questa interpretazione, le sue coordinate rispetto al sistema di riferimento costituito dalle funzioni trigonometriche (cfr. per esempio «Calcolo»).

In geometria proiettiva bidimensionale, se si considera l'equazione omogenea $X_1x_1+X_2x_2+X_3x_3=0$, essa rappresenta l'equazione di una retta di coordinate omogenee (X_1, X_2, X_3) se le x_i variano e le X_i restano fisse, e l'equazione del punto di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) (considerato come *inviluppo* delle rette passanti per esso) se le X_i variano e le x_i restano fisse (principio di dualità di Plücker). In generale, in uno spazio proiettivo $\mathbf{P}^n$ si dispone di coordinate omogenee duali per i punti e per gli iperpiani. Nasce cosí il problema di trovare coordinate omogenee per le sottovarietà di dimensione $1<d<n-1$. Si consideri ad esempio uno spazio proiettivo $\mathbf{P}^3$ di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4) per i punti e (X_1, X_2, X_3, X_4) per i piani. Sia Δ la retta passante per due punti x e y di $\mathbf{P}^3$ e si consideri la matrice 2×4

$$\begin{pmatrix} x_1 \dots x_4 \\ y_1 \dots y_4 \end{pmatrix}.$$

Siano p_{ij} i sei minori $p_{ij}=x_iy_j-y_ix_j$, $i,j=1, \dots, 4$, $i\neq j$, $p_{ij}=-p_{ji}$. È facile verificare che, mediante i p_{ij} considerati come coordinate omogenee, la retta Δ viene rappresentata da un punto di $\mathbf{P}^5$. Ma poiché i p_{ij} soddisfano la relazione

$$(1) \qquad p_{14}p_{23}+p_{24}p_{31}+p_{34}p_{12}=0,$$

«lo spazio» delle rette di $\mathbf{P}^3$ è in effetti rappresentabile mediante la *quadrica* Q di $\mathbf{P}^5$ d'equazione (1). I p_{ij} si chiamano *coordinate plückeriane* delle rette di $\mathbf{P}^3$ e la geometria di Q diventa la geometria dei sistemi di rette di $\mathbf{P}^3$. Piú in generale, le sottovarietà lineari di dimensione l di $\mathbf{P}^n$ si possono rappresentare con i punti di una sottovarietà algebrica (non lineare) di uno spazio $\mathbf{P}^N$ di dimensione superiore (teoria delle grassmanniane).

Non soltanto le sottovarietà lineari di $\mathbf{P}^n$ possono essere considerate punti di una sottovarietà algebrica di $\mathbf{P}^N$. Infatti [cfr. Dieudonné 1974] la nozione di coordinate plückeriane può estendersi fino a trattare come punti di una varietà algebrica proiettiva *tutte* le sottovarietà algebriche (non lineari) di $\mathbf{P}^n$. Sia in effetti V una sottovarietà algebrica di dimensione l di $\mathbf{P}^n$. Per la dualità tra punti e iperpiani di $\mathbf{P}^n$ si può considerare un sistema S di $l+1$ iperpiani di $\mathbf{P}^n$ come un punto di $(\mathbf{P}^n)^{l+1}$. Si fa allora vedere che il sistema S la cui intersezione ha elementi in comune con V forma un'ipersuperficie di $(\mathbf{P}^n)^{l+1}$ di equazione $F_V=0$, ove F_V è un polinomio irriducibile omogeneo nelle coordinate omogenee degli iperpiani di S. I coefficienti di F_V si chiamano *coordinate di Chow* di V e permettono di rappresentare V come un punto di uno spazio $\mathbf{P}^N$ la cui dimensione dipende da l e dal grado di V.

Cosicché, mediante lo sviluppo della geometria in $\mathbf{P}^n$, mediante la rappresentazione di enti derivati da $\mathbf{P}^n$ come punti di sottovarietà di $\mathbf{P}^N$ di dimensione superiore, la cui geometria ne traduce le proprietà, è sorto progressivamente uno dei metodi fondamentali della geometria algebrica.

3. *Il passaggio del globale al locale.*

A partire dalla rottura compiuta da Riemann relativamente al contenuto da dare al concetto di spazio, i matematici hanno iniziato a considerare spazi generalizzati costituiti da enti qualsiasi dipendenti da un certo numero (finito o infinito) di parametri o gradi di libertà. Gli spazi hanno allora preso a proliferare, dalle varietà differenziabili agli spazi funzionali.

Tale generalizzazione del concetto di spazio ha assunto due grandi direzioni: da una parte quella degli spazi ottenuti per incollamento di pezzi di spazi standard ($\mathbf{R}^n$ o $\mathbf{C}^n$) e dall'altra quella degli spazi ottenuti estendendo alla dimensione infinita (in particolare alla dimensione numerabile) la struttura di spazio vettoriale e la teoria degli operatori lineari.

Per trattare gli spazi ottenuti per incollamento di pezzi di spazi standard, e cioè le varietà differenziabili, analitiche o algebriche, s'è dovuta introdurre la nozione di *coordinate locali*, ossia localizzare la nozione di sistema di riferimento (cfr. «Locale/globale»). Si ricordi per esempio che una varietà differenziabile reale di dimensione n è uno spazio topologico M ricoperto da aperti U_i, detti *carte locali*, omeomorfi ad aperti V_i di $\mathbf{R}^n$ mediante omeomorfismi φ_i ai quali s'impone di dar luogo a funzioni di incollamento $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$: $\varphi_i(U_i\cap U_j)\to\varphi_j(U_i\cap U_j)$ che siano differenziabili. Se U_i è una carta locale di M si possono trasportare ad U_i, tramite l'omeomorfismo φ_i^{-1}, le coordinate di V_i e si ottengono in tal modo le coordinate locali della carta (U_i, φ_i). Ogni sistema di coordinate locali $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di M in un intorno di $x\in M$ definisce un sistema di riferimento (una base) nello spazio vettoriale T_xM dei vettori tangenti ad M in x. Tali riferimenti tangenti variano al variare del punto x considerato e quindi, contrariamente a quanto succedeva nel caso degli spazi standard $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ o $\mathbf{P}^n$, non possiedono alcun carattere globale. Inoltre non si è neanche sicuri di poter spostare differenziabilmente un sistema di riferimento tangente lungo M. Infatti, ciò equivarrebbe a dire che su M è possibile costruire n campi differenziabili di vettori tangenti linearmente indipendenti in ogni punto x di M e ciò implicherebbe che il fibrato tangente $TM\to M$ di M fosse trivializzabile cioè diffeomorfo a un prodotto diretto $M\times\mathbf{R}^n$. Allorché TM è trivializzabile, si dice che M è *parallelizzabile*. È eccezionale che una varietà differenziabile sia parallelizzabile. Si sa per esempio che le sole sfere parallelizzabili sono S^1, S^3, S^7 (teorema di Bott-Kervaire-Milnor: cfr. l'articolo «Locale/globale»).

Il fatto però che M non sia in generale parallelizzabile non vieta di spostare i riferimenti tangenti su M. Spostando un sistema di riferimento su M lungo un cappio, si può ritornare al punto di partenza con un riferimento *differente*. In altri termini, si può considerare il fibrato dei riferimenti su M e, anche se esso non ammette sezioni globali, considerarne delle sezioni, rilevando su di esse

cammini di M. La coomologia di tale fibrato è determinante per la coomologia di M a valori nei fibrati vettoriali, punto di vista che sviluppa la teoria dei fibrati *principali* inaugurata da Cartan nel suo metodo detto del (sistema di) *riferimento mobile*.

L'uso delle coordinate locali è ineliminabile in geometria differenziale e riemanniana. Esso sta alla base di tutti i calcoli e permette di definire delle entità cosí importanti quali la curvatura di una varietà, la parentesi di Lie di due campi vettoriali, l'azione di una connessione affine, ecc. (cfr. «Invariante» e «Relatività»). Tuttavia, poiché la geometria di una varietà è *intrinseca*, cioè indipendente dalle coordinate locali scelte, bisogna sempre presentarne i risultati in modo invariante. Le coordinate locali servono ad esprimere e a calcolare, ma devono poter essere eliminate.

4. *Cambiamento di riferimento, invarianza e relatività.*

Il fatto che in uno spazio nel quale nessun punto è fenomenologicamente distinguibile (cioè in uno spazio privo di punti di riferimento) non ci si possa riferire che mediante un sistema di coordinate, che un tale sistema sia arbitrario e che perciò gli enti derivati da tale spazio debbano aver senso a prescindere dalla scelta del sistema di riferimento, è un'evidenza a priori tra le piú feconde di tutta la matematica e soprattutto di tutta la fisica. È anzi doveroso notare che in fisica questa evidenza possiede lo statuto di un autentico *principio a priori dell'esperienza* che è *determinante* per l'oggettività fisica e per la struttura dei suoi oggetti. Questo fatto non è sufficientemente ricordato, eppure esso è epistemologicamente decisivo poiché mostra che la fisica ha confermato, al di là di ogni attesa, il profondo significato dell'apriorismo kantiano. Si tratta, a parere di chi scrive, di un'osservazione essenziale per una rivalutazione dei rapporti tra la scienza e la filosofia critica. L'apriorismo kantiano non dev'essere interpretato come un assoluto d'origine logica ma come un condizionamento dell'esperienza possibile. Esso ha la funzione di dedurre alcune intuizioni dei principî sintetici dell'esperienza il cui sviluppo matematico permette di assorbire progressivamente la descrizione dei fenomeni. In altre parole, tale funzione non è per nulla incompatibile con l'esperienza, anzi: essa concerne il ruolo della matematica nella teoria e consiste nell'assegnare a quest'ultima una *finalità* (una teleologia) che non è quella di una semplice modellizzazione *ma di un'identificazione progressiva della matematizzazione dell'esperienza con lo sviluppo matematico del suo inquadramento a priori* [cfr. Petitot 1980; nonché «Categorie/categorizzazione» e «Teoria/modello»]. L'apriorismo kantiano è dunque inscindibile dallo sviluppo *concettuale* della matematica.

Questa teleologia razionale dell'identificazione dell'oggettività con lo sviluppo matematico del suo inquadramento a priori è forse piú che mai manifesta nella storia del principio di relatività. Si deve dunque richiamarne brevemente qualche elemento e ciò sarà fatto partendo dall'ottica generale dell'invarianza per cambiamenti di riferimento.

4.1. Cambiamenti di riferimento e gruppi di Lie.

La classe dei sistemi di riferimento di uno spazio astratto E definisce una struttura geometrica su E. I cambiamenti di riferimento entro questa classe costituiscono un *gruppo*, il gruppo invariante della struttura e, a partire dal programma di Erlangen di Klein, si *definisce* una geometria mediante il suo gruppo invariante e le proprietà intrinseche degli enti di questa geometria sono le proprietà invarianti rispetto a tale gruppo.

Si è stati dunque condotti in modo naturale ad analizzare la struttura generale dei gruppi di cambiamenti di riferimento e in particolare la struttura dei gruppi classici dei cambiamenti di base negli spazi vettoriali (gruppi lineari), delle isometrie negli spazi euclidei (gruppi ortogonali), o degli automorfismi di spazi complessi o simplettici (gruppi unitari o gruppi simplettici). Questi gruppi hanno doppia struttura. Da un lato sono gruppi (struttura algebrica) e dall'altro sono varietà algebriche, analitiche o piú generalmente differenziabili (struttura geometrica). Costituiscono l'oggetto della teoria detta dei gruppi di Lie, teoria sviluppata essenzialmente da Lie, Klein, Killing e soprattutto Cartan; si tratta senza dubbio di una delle teorie piú complete ed estetiche della matematica (cfr. «Invariante»).

In fisica la struttura del gruppo d'invarianza dello spazio-tempo diventa *determinante* di oggetti nel senso già visto a proposito dell'apriorismo kantiano. In fisica si considerano non solo i cambiamenti di riferimento geometrici e statici, ma anche quelli dinamici, cioè quei riferimenti che si spostano gli uni rispetto agli altri. In relatività galileiana-newtoniana si suppone che lo spazio-tempo $\mathcal{E}$ sia il prodotto di uno spazio euclideo tridimensionale e di un asse dei tempi (tempo universale). Tra tutti i riferimenti possibili di $\mathcal{E}$, si ammette che esista una classe $\mathcal{I}$, la classe dei sistemi di riferimento detti *inerziali*, rispetto a cui le leggi della fisica possono esprimersi in modo invariante. Se R è un elemento di $\mathcal{I}$, tutti gli elementi di $\mathcal{I}$ si ottengono sia per cambiamenti geometrici (traslazioni nel tempo, traslazioni e rotazioni nello spazio) sia per traslazioni di velocità uniforme (cfr. «Relatività»). Sia G il gruppo detto di Galileo dei cambiamenti di riferimento inerziali. Le leggi della fisica devono essere invarianti rispetto all'azione di G e ciò impone loro vincoli fortissimi.

La forza miracolosa della fisica fondamentale risiede in gran parte nel fatto ch'essa ha saputo stabilire una *solidarietà* tra la struttura del gruppo d'invarianza dinamica dello spazio-tempo e alcuni attributi e proprietà fondamentali della materia. Infatti, all'invarianza per traslazioni nello spazio sono associati l'impulso di una particella e la sua conservazione, all'invarianza per rotazioni sono associati il suo momento cinetico e la sua conservazione, all'invarianza per traslazioni nel tempo sono associate la sua energia e la sua conservazione. Si sa d'altronde che la relatività ristretta einsteiniana ha avuto origine dalla constatazione che le equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico *non erano* invarianti per il gruppo di Galileo. Il loro gruppo d'invarianza è il gruppo delle trasformazioni di Lorentz. Guidato da un profondo senso dell'a priori del prin-

cipio di relatività, Einstein è stato condotto a fare di questo gruppo d'invarianza dell'elettromagnetismo il gruppo d'invarianza di tutta la fisica e dunque in particolare della *meccanica*. La celebre equivalenza tra massa ed energia non è che una *conseguenza diretta* del cambiamento del gruppo d'invarianza, ossia della geometria di $\mathcal{E}$ (cfr. l'articolo «Relatività»).

In generale, se G è il gruppo d'invarianza dello spazio-tempo $\mathcal{E}$, la struttura geometrica di questo gruppo diventa determinante per quelle che prendono il nome di *particelle elementari* di questo spazio-tempo, cioè per la meccanica quantistica che è ad esso associata. Infatti, in meccanica quantistica un sistema viene rappresentato mediante lo spazio H (che, per ragioni di carattere generale, si può supporre essere uno spazio di Hilbert) delle sue funzioni d'onda. È peraltro a priori evidente che, poiché la scelta di un sistema di riferimento è relativa (concerne l'osservatore e non il sistema), il gruppo G deve operare su H. In altri termini, H è una *rappresentazione* di G. Dire che il sistema è elementare equivale dunque a dire che tale rappresentazione è *irriducibile*. La teoria delle rappresentazioni irriducibili di G (eventualmente esteso mediante gruppi di simmetrie interne) diventerà dunque *il principio di classificazione delle particelle elementari* (cfr. «Particella» e «Simmetria»). Si vede allora che mentre in partenza era evidente, *il principio di relatività è divenuto costitutivo per la struttura della materia*. Solo nell'atomismo greco in cui gli atomi sono concepiti come la manifestazione dei sottogruppi finiti (irriducibili a sottogruppi di rotazione del piano) del gruppo di rotazione di $\mathbf{R}^3$, si ritrova l'idea che le simmetrie dello spazio-tempo determinano la struttura degli oggetti che vi evolvono, cioè, piú in generale, che un principio di relatività del sistema di riferimento è ontologicamente costitutivo.

4.2. Campi tensoriali, covarianza e relatività generale.

Quando si considerano varietà differenziabili, per cui la nozione di riferimento vale solo localmente come riferimento tangente, il principio d'invarianza per cambiamenti di riferimento *diventa un principio di covarianza per cambiamenti di coordinate locali*.

Sia x un punto di una varietà differenziabile M di dimensione n e $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistema di coordinate locali in x (x ha dunque come coordinate $(0, \ldots, 0)$ e può essere notato 0). Sia C una curva differenziabile di M passante per x. In termini di coordinate locali, C è definita da equazioni parametriche $x_i = \varphi_i(t)$, ove le φ_i sono funzioni differenziabili della variabile reale t soddisfacenti per esempio a $\varphi_i(0) = 0$. Il vettore tangente v a C in x ha come coordinate i numeri

$$X_i = \left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)_{t=0}.$$

Se ora si fa un cambiamento di coordinate locali considerando delle funzioni differenziabili $x'_i = x'_i(x_1, \ldots, x_n)$ che inducono un automorfismo lineare del piano tangente T_xM (cioè soddisfano alla condizione d'*invertibilità* che lo jacobiano $\mathcal{J} = (\partial x'_i/\partial x_j)(0)$ sia non nullo), la curva C sarà definita dalle equazioni

$x'_i = \psi_i(t) = x'_i(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$. Il vettore tangente v a C in x avrà dunque per coordinate i numeri

$$X'_i = \left(\frac{d\psi_i}{dt}\right)_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}(0) \left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}(0)\, X_j.$$

Si denoti α_i^j il numero $(\partial x'_i/\partial x_j)(0)$. Utilizzando la regola della somma degli indici, si ottengono dunque le espressioni

$$X'_i = \alpha_i^j X_j. \tag{2}$$

Ma il vettore tangente v ha un'esistenza *intrinseca* indipendente dalla scelta delle coordinate locali. Le relazioni (2) di *trasformazione* delle coordinate di v per cambiamento di coordinate locali esprimono proprio tale esistenza intrinseca. Esse la esprimono determinando un *tipo* di variazione di queste coordinate, cioè una *varianza*. Si è dunque condotti ad affermare che ogni sistema di n numeri $x_1, \ldots, x_n$ che si trasforma mediante la regola di trasformazione (2) per cambiamento di coordinate locali, definisce un oggetto che ha uguale varianza delle coordinate di un vettore tangente ad M. Si dirà che un tale sistema è un *tensore controvariante d'ordine* 1 *in* x.

Ma le coordinate X_i di v sono le coordinate relative a un riferimento in T_xM canonicamente associato alla scelta $(x_1, \ldots, x_n)$ di coordinate locali. Per definire questa base la cosa piú semplice è considerare v come un *operatore di derivazione* sulle funzioni differenziabili su M (cfr. «Differenziale» e «Infinitesimale»). Se f è una tale funzione, allora l'azione di v è definita dalla formula

$$vf = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{3}$$

La base di T_xM rispetto alla quale sono definite le coordinate X_i di v è dunque definita dagli n operatori $(\partial/\partial x_i) = \partial^i$. Questi operatori hanno una varianza che non è quella di un vettore tangente. Si operi infatti un cambiamento di coordinate locali. In base alle regole di differenziazione, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \qquad \text{cioè} \quad \partial'^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \partial^i. \tag{4}$$

Si denoti β_j^i il numero $(\partial x_j/\partial x'_i)$. Le relazioni (4) diventano le relazioni (5):

$$\partial'^i = \beta_j^i \partial^j. \tag{5}$$

La base ∂^j ha dunque una varianza *duale* di quella di v. Si dice ch'essa è la varianza di un *tensore covariante d'ordine* 1 *in* x.

Il fatto che la varianza di (∂^i) sia duale di quella di (X_i) permette allora facilmente di esprimere l'*invarianza* di v. Si ha infatti $v = X_i \partial^i$. Per cambiamento di coordinate locali v è trasformato in $v' = X'_i \partial'^i = \alpha_i^j X_j \beta_j^i \partial^j$ in virtú delle (2) e (5). Si ha dunque $v' = \alpha_i^j \beta_j^i X_j \partial^j$. Ma $\alpha_i^j \beta_j^i = 1$ poiché la matrice (β_j^i) è l'*inversa* della matrice jacobiana (α_i^j) e, poiché $X_j \partial^j = v$, si ha $v' = v$: v è invariante.

Si consideri ora la base $(dx_1, ..., dx_n)$ dei differenziali in x, cioè la base dello spazio cotangente T_x^*M. Sempre grazie alle regole di differenziazione si ha

$$dx'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j,$$

cioè $dx'_i = \alpha_i^j dx_j$. La base (dx_i) è dunque un tensore controvariante d'ordine 1 in x, ossia un sistema avente la *stessa varianza* delle coordinate di un vettore tangente. Ciò implica che l'entità $\partial^i dx_i$ è un'entità *invariante*. Tale entità è molto semplicemente l'operatore $d = \partial^i dx_i$ che fornisce il differenziale di una funzione f secondo la regola $df = (\partial f/\partial x_i) dx_i$.

Sia ora $\omega = a^i dx_i$ una 1-forma differenziale in x, cioè un elemento dello spazio cotangente T_x^*M. Il sistema degli (a_i) è un tensore covariante d'ordine 1. Si può dunque costruire un'entità *invariante* considerando la somma $a^i X_i$ ove (X_i) è il sistema delle coordinate di un vettore tangente v. Ma ω è una forma lineare su T_xM e questo numero invariante non è altro che il valore $\omega(v)$ di ω su v.

Si può notare che in tal modo si definisce la varianza di *due* tipi di enti, quelli di tipo «sistemi di coordinate» come (X_i) oppure (a^i) e quelli di tipo «base (di uno spazio vettoriale di enti) associata alla scelta di un sistema di coordinate locali» come (∂^i) oppure (dx_i). Se (X) è un sistema del primo tipo e (α) un sistema del secondo tipo che sia di varianza duale, allora $X\alpha$ è un'entità invariante (come $v = X_i \partial^i$ o $\omega = a^i dx_i$). Se (X) è un sistema del primo tipo e (a) un sistema del primo tipo ma di varianza duale, Xa è un numero invariante (come per $\omega = a^i dx_i$, $v = X_i \partial^i$ e $\omega(v) = X_i a^i$). Se χ è un sistema del secondo tipo e α un sistema del secondo tipo ma di varianza duale, allora $\chi\alpha$ è un operatore invariante (come per $d = \partial^i dx_i$).

Si vede dunque che sulle varietà differenziabili la nozione di cambiamento di riferimento fa sorgere tipi di varianza e mediante ciò crea entità invarianti, cioè *oggetti*. Tali oggetti sono i *tensori*. Ad ogni punto x di M si può dunque associare un'algebra tensoriale.

Un tensore può però evidentemente *variare* con x. Si è dunque condotti a considerare *campi tensoriali* su M, cioè sezioni dei fibrati vettoriali su M le cui fibre sono gli spazi di tensori di un certo tipo. In analogia al calcolo differenziale sulle funzioni, si può anche sviluppare un calcolo differenziale sui tensori. Ma il problema è un po' piú complicato in quanto, se a un tensore si applicano le regole classiche di differenziazione, *non si ottiene*, in generale, *un tensore*.

Si consideri per esempio una funzione $f: M \to \mathbf{R}$. Sia $(x_1, ..., x_n)$ un sistema di coordinate locali in $x \in M$. Le derivate parziali $(\partial f/\partial x_i)$ di f sono le coordinate di un tensore covariante d'ordine 1, che per prodotto con un tensore controvariante d'ordine 1 (X_i), dà lo scalare $Xf = X_i(\partial f/\partial x_i)$ che è la derivata di f rispetto ad X. Ma è facile vedere che le derivate *seconde* $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ non sono le coordinate di un tensore. Poiché anche le derivate d'ordine superiore di una funzione non possono essere definite in modo invariante, si è stati condotti ad introdurre la nozione di *getto* (cfr. «Locale/globale» e «Geometria e topologia»).

Per poter elaborare una teoria invariante della differenziazione dei tensori, bisogna introdurre la nozione di *connessione affine* e sviluppare la teoria della derivazione covariante (cfr. «Relatività»).

Se si ritorna ora alla relatività einsteiniana, si vede che essa riposa interamente sui seguenti principî, alcuni dei quali sono puramente a priori, mentre altri dipendono solo da dati sperimentali di basilare importanza:

1) Lo spazio-tempo $\mathcal{E}$ è una varietà differenziabile: dato intuitivo fondamentale.
2) Questa varietà è a quattro dimensioni: dato intuitivo fondamentale.
3) In $\mathcal{E}$ esiste la possibilità di *misurare*; è dunque una varietà riemanniana: dato pratico primitivo.
4) Gli enti fisici devono essere descritti da entità di varianza ben definita (e dunque da campi tensoriali) dalle quali si possono dedurre entità invarianti (principio a priori).
5) Localmente $\mathcal{E}$ ammette il gruppo di Lorentz come gruppo invariante (principio di relatività).
6) Vi è un'equivalenza tra massa gravitazionale e massa inerziale (esperienza cruciale) e dunque tra gravità ed inerzia (principio di relatività generale).

Nell'articolo «Relatività» o nel classico *Gravitation* di Misner, Thorne e Wheeler [1973], si vedrà lo sviluppo che, sebbene classico, continua ad affascinare per il suo contenuto teorico, dell'idea fondamentale che l'equivalenza degli *osservatori* (cioè l'invarianza per cambiamenti di sistema di riferimento e di coordinate locali) è *costitutiva* della struttura dell'universo.

5. *Sistemi di riferimento adattati.*

Dati uno spazio E e una certa entità dipendente da tale spazio, è spesso utile considerare dei riferimenti o delle coordinate locali in E ***adattate*** all'entità in questione. Ciò permette infatti di descrivere tale entità in maniera particolarmente semplice. In matematica esistono un'enorme quantità di procedure di questo tipo. Ci si limiterà a citare brevemente quattro esempi di natura molto diversa.

5.1. Sistemi di riferimento adattati in geometria differenziale.

Dati una curva piana C e un punto x di C, si può considerare il sistema di riferimento costituito dalla tangente e dalla normale a C in x. Se S è una superficie in $\mathbf{R}^3$ e x un punto di S, si può analogamente considerare il riferimento costituito dalla normale in x a S e, nel piano tangente a S in x, gli assi principali della conica che descrive la curvatura (cfr. «Differenziale»).

5.2. Sistemi di riferimento adattati in algebra lineare.

Sia E uno spazio vettoriale di dimensione n e u un endomorfismo di E. È noto che l'*analisi spettrale* di u consiste nel cercare una base di E in cui l'espressione di u (la sua matrice) diventi il piú semplice possibile. Si può dunque parlare di base «adattata» ad u.

Similmente, se A è la matrice di una forma quadratica, la ricerca degli «assi principali» è la ricerca di una base adattata ad A.

Questo procedimento può essere generalizzato agli spazi vettoriali di funzioni ed agli operatori lineari che sono gli operatori integro-differenziali. La ricerca di riferimenti adattati ad alcuni di questi operatori diventa allora la ricerca di funzioni particolari, come le funzioni trigonometriche e le funzioni speciali (cfr. «Spettro»).

5.3. Sistemi di riferimento adattati in teoria delle singolarità.

Sia $f: M \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile a valori reali definita su una varietà differenziabile di dimensione n. Sia x_0 un punto critico non degenere di f (cfr. «Locale/globale»). Il teorema di Morse dice che esiste un sistema di coordinate locali $(x_1, \ldots, x_n)$ in x_0 (ivi x_0 ha dunque coordinate $(0, \ldots, 0)$) tale che f assuma la forma particolarmente semplice

$$f(x) = f(x_0) - \sum_{i=1}^{r} x_i^2 + \sum_{j=r+1}^{n} x_j^2$$

(il numero r di termini quadrati preceduti dal segno negativo è l'*indice* del punto critico). Tale risultato significa due cose. Da un lato che mediante un cambiamento di coordinate locali si possono annullare, nello sviluppo di Taylor di f in x, tutti i termini di grado ≥ 2 (in un punto critico non degenere f è determinata dal suo getto di ordine 2). Inoltre che, poiché la hessiana di f in x è di rango massimo, è possibile, mediante un cambiamento lineare di coordinate, assumere come sistema di riferimento il sistema dei suoi «assi principali».

In generale, dato un punto singolare di un'applicazione $f: M \to N$ tra due varietà differenziabili, si cercheranno sistemi di coordinate locali sia nel dominio M sia nel codominio N per cui l'espressione di f diventi la piú semplice possibile. Il teorema di Whitney sui modelli canonici delle singolarità delle applicazioni differenziabili strutturalmente stabili tra varietà di dimensione 2 ne è un tipico esempio.

5.4. Variabili azione-angolo in meccanica hamiltoniana.

In meccanica hamiltoniana (cfr. in particolare «Geometria e topologia», VI, pp. 713-23) è dato uno spazio delle fasi munito d'una struttura *simplettica*, cioè una varietà differenziabile E di dimensione pari $2n$ munita di una 2-forma differenziale *chiusa e regolare* ω. In generale E sarà il fibrato cotangente di una varietà di configurazione M.

Per il teorema di Darboux, se $x \in E$, esistono sempre dei sistemi di coordinate locali di tipo (p, q), $q = (q_1, \ldots, q_n)$ e $p = (p_1, \ldots, p_n)$ per cui ω prende la forma standard $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$. Tali sistemi «adattati» a ω si chiamano sistemi di coordinate simplettiche e i cambiamenti di coordinate simplettiche si chiamano trasformazioni *canoniche*. Si tratta delle trasformazioni che lasciano invariante la 2-forma ω.

È noto che un sistema hamiltoniano è allora definito da uno ***hamiltoniano*** su M cioè da una funzione «energia» $H: M \to \mathbf{R}$ (differenziabile). Ad H viene associata la 1-forma dH che è il suo differenziale. Ma la 2-forma ω stabilisce un isomorfismo tra vettori tangenti e vettori cotangenti di E e si può dunque, tramite ω, associare a dH (e dunque ad H) un campo di vettori su E, detto flusso hamiltoniano, le cui traiettorie sono date dalle equazioni canoniche di Hamilton:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Per costruzione, la 2-forma ω è invariante per l'azione del flusso (e dunque anche ω^n che è la forma «volume» di E: teorema di Liouville); cosí pure lo è lo hamiltoniano H (conservazione dell'energia).

Per cercare d'integrare le equazioni di Hamilton riportate sopra, il procedimento consiste nel cercare *integrali primi* ossia invarianti del flusso *indipendenti* da ω e da H. Infatti esiste un teorema fondamentale, dovuto a Liouville, che afferma che se si conoscono $n-1$ integrali primi (cioè $n-1$ funzioni $F_i: E \to \mathbf{R}$ le cui parentesi di Poisson (F_i, H) con lo hamiltoniano H sono identicamente nulli) i quali, da un lato sono tra loro *indipendenti* ed indipendenti da H (cioè tali che in ogni punto x di E i differenziali dF_i e dH siano linearmente indipendenti) e dall'altro sono tra loro *in involuzione* ed in involuzione con H (cioè tali che le parentesi di Poisson (F_i, F_j) e (F_i, H) siano identicamente nulle), allora le equazioni di Hamilton s'integrano per quadrature.

Piú precisamente, se le condizioni del teorema di Liouville sono soddisfatte, se $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ è un sistema di valori per le F_i, e se e è un valore di H, il sottoinsieme $V_{a,e}$ di E definito da $H = e$ e $F_i = a_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ è un sottoinsieme *invariante* rispetto al flusso hamiltoniano. Poiché le F_i e H sono indipendenti, $V_{a,e}$ è in effetti una sottovarietà regolare di E. Se per di piú essa è compatta e connessa, considerazioni di natura puramente geometrica implicano ch'essa è diffeomorfa a un *toro* n-dimensionale T. Il moto su T è allora *quasi periodico*, il che significa che, se $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ sono le coordinate angolari di T, le equazioni di Hamilton si riducono a $d\varphi/dt = \Omega$, ove Ω è una n-pla che dipende da a e da e.

Un tale sistema avente n integrali primi (tra cui H) indipendenti e in involuzione si chiama sistema *integrabile*. Si può allora mostrare che in un intorno di $V_{a,e}$, E è un prodotto diretto di $V_{a,e}$ (cioè di T) per un aperto U di $\mathbf{R}^n$. Si ha

dunque un sistema di coordinate (Ω, φ) in cui le equazioni di Hamilton si scrivono $d\varphi/dt = \Omega$, $d\Omega/dt = 0$, e s'integrano dunque immediatamente ottenendo $\Omega = \text{cost}$ e $\varphi(t) = \varphi(0) + \Omega t$. Tali coordinate non sono in generale simplettiche. È però possibile trovare altri integrali primi I_i, funzioni delle F_i, tali che le coordinate (I, φ) siano simplettiche. Le coordinate simplettiche (I, φ) si chiamano *variabili azione-angolo* [cfr. Arnol'd 1974]. Se le coordinate simplettiche sono «adattate» alla 2-forma ω che definisce la struttura simplettica di E, le variabili azione-angolo sono coordinate simplettiche «adattate» allo hamiltoniano H.

6. *Sistemi di riferimento e classificazioni.*

I pochi, drammaticamente lacunosi richiami che precedono, mostrano la straordinaria «fecondità» delle nozioni di sistema di riferimento e di coordinate. Esse hanno però preso origine da una situazione in cui lo spazio di base considerato è omogeneo, cioè privo di punti di riferimento. Ora, com'è stato notato, il problema del sistema di riferimento si pone anche in spazi «eterogenei», ossia *marcati* o *contrassegnati*. Fino ad ora questo aspetto del problema del riferimento era rimasto estraneo alla matematica. Per concludere, si desidera fare una breve osservazione sulla recente presa di coscienza di tale problema.

Un metodo radicalmente diverso di riferire un oggetto è quello di riferirlo non allo spazio ma *agli oggetti di ugual natura*. Il paradigma ora non è piú quello di un osservatore di fronte all'omogeneità dello spazio ma è quello della *classificazione*. Si tratta del paradigma dello *strutturalismo*. Esso consiste nel dare una posizione a un'entità in uno «spazio strutturale», cioè uno «spazio» *categorizzato* in classi mediante un sistema di differenze, di soglie, di scarti differenziali (cfr. «Sistematica e classificazione»). Se gli enti considerati sono discreti, tale paradigma si sviluppa in teorie logico-combinatorie. Ma se questi enti dipendono da parametri *continui*, la situazione cambia radicalmente. Il concetto di classificazione acquista un contenuto *geometrico* e diventa suscettibile di un'analisi geometrica profonda dalla quale la teoria delle catastrofi ha tratto nuove possibilità di modellizzazione.

Si ricordino dunque (in riferimento all'articolo «Locale/globale») alcune prerogative del paradigma *catastrofista*. Si considerino «forme» descrivibili in termini di applicazioni $f: M \to N$ tra due varietà differenziabili. Tali «forme» costituiscono uno spazio funzionale $\mathfrak{F}$. Questo spazio è *intrinsecamente eterogeneo*. Infatti è naturale considerare che due forme f e g siano *equivalenti*, che esse abbiano lo stesso tipo differenziabile, se si può passare dall'una all'altra mediante cambiamenti di coordinate nel dominio (M) e nel codominio (N) o, in altri termini, se esistono un diffeomorfismo φ di M e un diffeomorfismo ψ di N tali che si abbia $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. In questa definizione di equivalenza entra in gioco il principio di relatività del riferimento negli spazi M ed N. È però essenziale notare che l'uso del principio di relatività del riferimento implica che il problema del riferimento stesso si pone in modo *totalmente diverso* in $\mathfrak{F}$. Infatti, $\mathfrak{F}$ essendo munito della topologia adeguata alla struttura differenziabile, è possibile definire le forme *strutturalmente stabili* di $\mathfrak{F}$ come le forme f che ammettono un intorno di forme g tutte equivalenti ad f. Se U è l'aperto di $\mathfrak{F}$ composto di forme stabili, il chiuso ad esso complementare K – detto insieme catastrofico globale di $\mathfrak{F}$ – è un sottospazio di $\mathfrak{F}$ *classificante* i tipi stabili. Tale insieme catastrofico K essendo *inerente* ad $\mathfrak{F}$ (intrinseco), il problema del riferimento in $\mathfrak{F}$ diventa duplice: 1) dare una posizione agli elementi di $\mathfrak{F}$ rispetto a K (aspetto puramente qualitativo del riferimento); 2) data una classe V definita da K, dare una posizione agli elementi di V in V mediante l'uso di coordinate (aspetto quantitativo del riferimento).

Nei modelli trasversi delle singolarità di tipo catastrofi elementari, va sottolineato (cfr. «Locale/globale») il carattere «misto» tra l'aspetto qualitativo del riferimento (basato sulla *morfologia* di K e sul modo con cui *separa* lo spazio) e l'aspetto quantitativo del riferimento stesso (basato sull'uso delle coordinate). [J. P.].

Arnol'd, V. I.
1974 *Matematičeskie metodi klassičeskoi mehaniki*, Nauka, Moskva (trad. it. Editori Riuniti, Roma 1979).

Dieudonné, J.
1974 *Cours de géométrie algébrique*, Presses Universitaires de France, Paris.

Duhem, P.
[1913-16] *Le système du monde; histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, 10 voll., Hermann, Paris 1913-59.

Koyré, A.
1957 *From the Closed World to the Infinite Universe*, Johns Hopkins Press, Baltimore (trad. it. Feltrinelli, Milano 1974²).

Misner, C. W.; Thorne, K. S.; e Wheeler, J. A.
1973 *Gravitation*, Freeman, San Francisco.

Petitot, J.
1980 *Per un nuovo criticismo*, in «L'uomo, un segno», IV, n. 2-3.

La ricognizione antropologica (cfr. **anthropos**) della **rappresentazione** dello spazio nelle diverse culture (cfr. **cultura/culture**) – in particolare nelle **società** primitive (cfr. **primitivo**) ove lo spazio è locale (cfr. **locale/globale**) e simbolicamente (cfr. **segno, simbolo**) scandito dall'**opposizione/contraddizione** di **sacro/profano** – e l'indagine della **genesi** psicologica delle nozioni spaziali e del loro **apprendimento** mettono in luce la rilevanza dei sistemi di riferimento nella modellizzazione (cfr. **modello**) del **reale**. La ricerca di un punto di riferimento in un viaggio sugli **oceani** o nella costituzione delle varie **cosmologie** (slittate progressivamente dall'**astrologia** all'**astronomia**), l'analisi della **spazialità** pittorica con gli studi sulla prospettiva (cfr. **disegno/progetto**), le varie raffigurazioni della **terra** che via via vengono approntate dalla cartografia (cfr. **atlante**) sono tutte alla base della nozione moderna di sistema di riferimento che con Descartes e Leibniz è venuta svolgendo un ruolo chiave per le **matematiche**, consentendo l'articolazione sistematica dello studio delle varie **funzioni**, la nascita del moderno punto di vista

differenziale, rilevanti sviluppi del **calcolo** stesso (cfr. anche **infinitesimale**). Con i grandi progressi dell'astrazione matematica (cfr. **astratto/concreto**) dell'Ottocento, in particolare con la rottura concettuale promossa da Riemann, la considerazione di spazi generalizzati costituiti da entità qualsiasi dipendenti da un numero finito o infinito di parametri ha potenziato in modo formidabile lo studio – in chiave di **geometria e topologia** – di moltissimi problemi matematici. Nel contesto della **fisica** ha contemporaneamente preso corpo la definizione degli oggetti fisici come invarianti (cfr. **invariante**) rispetto ai cambiamenti di riferimento, al punto che l'esigenza che una **legge** fisica non dipenda da un particolare sistema (scelto in modo arbitrario, dunque convenzionale; cfr. **convenzione**) è stata incorporata nelle teorie fisiche di base (cfr. **teoria/modello**) come la **relatività** (cfr. anche **spazio-tempo**) e i **quanti** (cfr. anche **conservazione/invarianza** e per altri aspetti **particella**). Ma se enormi progressi intellettuali si sono compiuti nell'analisi dei sistemi di riferimento per spazi omogenei, anche gli spazi eterogenei possono venir contrassegnati dagli opportuni «riferimenti» mediante un sistema di scarti differenziali, di soglie (cfr. **soglia**). Si ritrova cosí l'antico problema della **sistematica e classificazione**: quando le entità considerate sono discrete (cfr. **continuo/discreto**) questo **paradigma** si sviluppa in una **combinatoria** logico-linguistica (cfr. **logica**, **linguaggio** e anche **codice**, **immagine**); se invece dipendono da parametri continui, la classificazione acquisisce un carattere geometrico, come è nei casi modellizzati dalla teoria delle **catastrofi**.

Stabilità/instabilità

1. *I diversi aspetti del problema.*

Non esiste una definizione rigorosa di stabilità che comprenda tutti i casi in cui questa parola è usata nella ricerca scientifica contemporanea. Nei lavori dei matematici si trovano invece molte definizioni – nel senso molto preciso che il termine 'definizione' ha nella matematica contemporanea – di stabilità, di solito distinte tra loro da aggettivi, come per esempio 'stabilità orbitale, asintotica, strutturale, numerica, assoluta, ecc.' oppure dal riferimento a un autore: 'stabilità di Lagrange, di Ljapunov, di Andronov-Pontrjagin, di Thom, ecc.'. Nei lavori dei fisici e degli ingegneri si trova invece spesso una nozione di stabilità non pienamente formalizzata, specificata di volta in volta da espressioni del tipo «stabilità rispetto alle piccole perturbazioni dei dati *xyz*».

L'unico metodo conosciuto per ricondurre ad unità le svariate decine di definizioni diverse, che compaiono nei piú disparati ambiti della matematica pura ed applicata, è quello di ricorrere a una definizione di stabilità/instabilità di carattere *metamatematico*. È necessario che il lettore sia avvertito del fatto che i ragionamenti metamatematici di questo tipo, portati avanti da Thom e dalla sua scuola (cfr. del resto le osservazioni finali dell'articolo «Matematiche» in questa stessa *Enciclopedia*, VIII, pp. 873-75), non sono affatto bene accetti a tutta la comunità scientifica. Eppure sembra che sia ormai tempo di far uscire questo dibattito dagli ambiti specialistici, non solo perché con le definizioni «alla Thom» si sono ottenuti risultati ormai cosí importanti da costituire praticamente una branca nuova della matematica pura ed applicata, ma soprattutto perché non sono state proposte serie alternative al tentativo di unificazione della nozione di stabilità fatto dalla scuola «catastrofista», se non quella di restare nella Babele precedente. Certo i ragionamenti di questo tipo hanno un prezzo, che molti trovano eccessivo: quello di mettere in risalto piú ciò che non si sa, i problemi aperti, i metodi scorretti ed illegittimi che si usano e non si riescono a correggere, di ciò che si sa ed è «sistemato» in modo soddisfacente. Questo prezzo – è bene che sia subito chiaro – sarà pagato anche in questo articolo.

In sintesi, una definizione matematica di stabilità/instabilità potrebbe essere questa: una proprietà definita nell'ambito di una struttura matematica è una proprietà di stabilità o instabilità se essa individua, in senso positivo o negativo, l'attitudine di un oggetto matematico della struttura stessa ad essere eventualmente impiegato in qualche modo come modello della realtà.

Per evitare equivoci metafisici è bene precisare che 'modello della realtà' viene qui inteso in senso strettamente empirico ed operativo (si veda l'articolo «Modello» in questa stessa *Enciclopedia*). Un modello può essere costituito da un'equazione – nel senso generalizzato di relazione tra diverse variabili a valori in oggetti di una teoria matematica data – e dall'interpretazione di alcune tra

le variabili in gioco come grandezze osservabili. Scelte alcune di queste grandezze come parametri da determinare con l'osservazione, alcune altre risulteranno determinate dall'equazione in funzione delle prime, ed i loro valori o proprietà osservabili saranno le predizioni del modello. Poiché non è detto che tutte le variabili in gioco siano osservabili, chiedersi se l'equazione è «in realtà» una «legge della natura» oppure solo una simulazione matematica è privo di senso in questo contesto; un dato modello può solo essere verificato con l'esperienza, confrontando le predizioni con le osservazioni.

Però questa descrizione «ingenua» del rapporto tra esperienza e matematizzazione è molto diversa dallo svolgimento storico della ricerca scientifica nell'età moderna, e la differenza principale è proprio il problema della stabilità. Poiché i dati «osservati» sono il risultato di misure sperimentali e di manipolazioni matematiche di questi, e perciò non sono mai esatti, ma approssimati per il duplice effetto degli errori di misura e delle approssimazioni introdotte per semplificare i calcoli. Non solo: l'equazione stessa non è mai un prodotto arbitrario del nostro intelletto, ma è il risultato di esperienze precedenti: nel caso piú semplice il modello contiene dei parametri «interni» che non sono misurati dall'esperienza in corso, ma sono il risultato di un'esperienza precedente, e perciò sono essi stessi noti con un certo margine di approssimazione. Nel caso piú complicato concettualmente, è la stessa forma matematica del modello (per esempio: funzione, cioè equazione in termini finiti; equazione differenziale lineare o non-lineare, a derivate ordinarie o parziali, problemi con dati iniziali o al contorno o misti, equazione alle differenze finite ad un passo o a piú passi, ecc.) che è stata scelta in base alla sua validità dimostrata da esperienze precedenti. Allora a maggior ragione le predizioni del modello sono solo approssimate; e l'errore prevedibile nella predizione è l'effetto cumulativo di tutte le approssimazioni – nelle misure, nei calcoli e nella teoria stessa – insite nel modello. Se tale errore prevedibile è abbastanza piccolo, per esempio dell'ordine di grandezza dell'errore sperimentale nella misurazione della grandezza predetta, allora il modello è utilizzabile; altrimenti che il modello predica l'esperienza si può verificare solo per caso. Ma come si fa a determinare – o meglio a maggiorare – l'errore di predizione?

Determinare un limite massimo per gli errori di predizione introdotti da ciascuna delle approssimazioni dei tre tipi detti – errori di misura, semplificazioni dei calcoli, schematizzazioni del modello matematico – è il problema della stabilità; in particolare il modello sarà *stabile* se l'errore di predizione dipenderà in modo continuo dalle approssimazioni introdotte, ossia se sarà possibile rendere arbitrariamente piccoli gli errori di predizione pur di rendere arbitrariamente precise le misure, i calcoli ed il modello stesso. Se poi queste precisioni siano raggiungibili in pratica, con i mezzi attuali (per esempio se i tempi di calcolo sono ragionevoli usando la generazione attuale di calcolatori), è un problema diverso, che si può far rientrare o meno nel termine 'problema di stabilità' (cfr. l'articolo «Calcolo» in questa stessa *Enciclopedia*).

Perciò per ogni tipo di modello matematico (equazione in termini finiti, equazione differenziale ordinaria o alle derivate parziali, principio variazionale,

rappresentazione di gruppo, C^*-algebra, varietà riemanniana, equazione alle differenze, alle differenze finite, integrale, integrodifferenziale, ecc.) e per ogni tipo di approssimazione introdotta (nei dati iniziali, nei dati al contorno, nei parametri interni del modello; errori di arrotondamento, di troncamento numerico, di troncamento di serie di Taylor, di Fourier, ecc.) si può dare una corrispondente definizione di stabilità. Non stupisce perciò che tali definizioni nella letteratura siano varie decine; anzi sono assai meno di quelle che potrebbero essere, semplicemente perché alcuni problemi di stabilità sono chiaramente di una tale difficoltà da sfidare l'immaginazione di tutti i ricercatori contemporanei.

Ma proprio perché la «teoria della stabilità» non è un singolo problema matematico ma una collezione potenzialmente infinita di problemi, dei quali solo quelli piú elementari sono stati studiati, ciò che è caratteristico dei problemi di stabilità è che la risposta alla domanda «Questo modello è stabile?» non è mai cosí netta come ci si potrebbe attendere dal risultato di una rigorosa ricerca scientifica. Il rapporto tra la stabilità e il suo contrario, l'instabilità, è sempre dialettico e storicamente determinato dallo stato della ricerca non solo matematica ma anche sperimentale. Perché se un modello è instabile rispetto a una previsione, che risulta perciò illegittima, può essere stabile rispetto a un'altra previsione, di natura piú qualitativa, meno precisa: per esempio l'instabilità stessa può essere stabile, e quindi costituire una previsione legittima: questo è il tema della teoria della stabilità piú raffinata, la teoria delle catastrofi (cfr. in questa stessa *Enciclopedia* l'articolo «Locale/globale», in particolare alle pp. 454-71 del volume VIII). Oppure può aversi stabilità rispetto ad alcune approssimazioni e non rispetto ad altre; capita troppo spesso che due tipi diversi di stabilità si escludano a vicenda. Capita perciò che il problema della stabilità di un modello sia chiuso e riaperto a piú riprese nella storia della scienza per effetto di progressi in campi apparentemente molto lontani della ricerca.

Percorrere questa enorme varietà di teorie e problemi di stabilità non è possibile né qui né in alcuna trattazione ragionevole; tuttavia sarebbe inutile proseguire senza fare degli esempi concreti di modelli matematici e di problemi di stabilità ad essi collegati, anche se per fare esempi matematicamente non banali e storicamente significativi occorre un certo apparato matematico (e qualche nozione di fisica). La maggior parte di questo articolo sarà perciò dedicata a un solo esempio, la cui storia ormai tricentenaria e la cui complessità matematica sono sufficienti ad illustrare una parte notevole dei problemi di stabilità incontrati dalla scienza moderna.

2. *Il problema dei due corpi.*

Forse il piú celebre di tutti i modelli matematici del mondo fisico è quello che descrive un sistema di corpi celesti – per esempio il sistema solare – come corpi che interagiscono tra loro soltanto con la reciproca attrazione gravitazionale, seguendo le leggi di Newton (cfr. del resto in questa stessa *Enciclopedia* l'articolo «Moto», IX, pp. 596 sgg.). Se i corpi sono puntiformi oppure perfettamente sferici, rigidi e omogenei (cioè se si trascura l'effetto dell'asimmetria delle loro forme), e si suppone che non vi sia alcun attrito, le equazioni differenziali che descrivono il moto dei corpi secondo la teoria newtoniana si dicono «problema degli n corpi della meccanica celeste», dove n è un numero intero maggiore di 1.

Si supponga per incominciare che i corpi siano solo due, dei quali uno fisso nell'origine O del sistema di coordinate in cui si studia il moto, e l'altro abbia una posizione variabile col tempo $P=P(t)$ ma sia vincolato a un piano fisso («problema piano»). Queste ipotesi, che servono alla semplicità dell'esposizione, non mutano la natura del problema dei due corpi. Allora la seconda legge di Newton dice che l'accelerazione (derivata seconda della posizione P rispetto al tempo) sarà proporzionale alla forza esercitata su P da O: $\mathbf{F}=m(d^2P/dt^2)$.

Ma poiché tale forza $\mathbf{F}$ sarà rivolta verso O (forza centrale) e di grandezza inversamente proporzionale al quadrato della distanza r tra P ed O, essa sarà esprimibile meglio usando il vettore $\mathbf{e}_r$ di lunghezza 1 rivolto da O verso P, cioè definito da $P=r\mathbf{e}_r$. Allora si avrà $\mathbf{F}=-(Mm/r^2)\mathbf{e}_r$, dove M è una costante, e le due espressioni di $\mathbf{F}$ uguagliate daranno l'equazione fondamentale del modello dei due corpi:

$$(1)\qquad \frac{d^2P}{dt^2}=-\frac{M}{r^2}\mathbf{e}_r.$$

Pertanto nel piano in cui si svolge il moto è naturale usare un sistema di coordinate polari r (distanza di O da P) e ϑ (angolo della retta OP a una direzione fissa). Si tratta ora di dedurre dall'equazione (1) le soluzioni $P(t)$ possibili, senza fare uso di altro che della matematica, in particolare delle proprietà formali dell'operatore derivata $\frac{d}{dt}$; per esempio la linearità di $\frac{d}{dt}$, $\frac{d}{dt}(f+g)=\frac{df}{dt}+\frac{dg}{dt}$, e la formula di Leibniz $\frac{d}{dt}(f\cdot g)=f\frac{dg}{dt}+g\frac{df}{dt}$.

Poiché, al variare di t, $\mathbf{e}_r$ ruota ma resta di lunghezza 1, la sua velocità è parallela al vettore $\mathbf{e}_\vartheta$ ad esso perpendicolare (in senso antiorario) e proporzionale alla velocità angolare $d\vartheta/dt$: $(d/dt)(\mathbf{e}_r)=(d\vartheta/dt)\mathbf{e}_\vartheta$. Perciò (per la formula di Leibniz),

$$\frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r)=\frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r+r\frac{d\vartheta}{dt}\mathbf{e}_\vartheta.$$

Poiché anche $\mathbf{e}_\vartheta$ ruota con velocità angolare $d\vartheta/dt$, $(d/dt)(\mathbf{e}_\vartheta)=-(d\vartheta/dt)\mathbf{e}_r$ e perciò, usando ancora la formula di Leibniz,

$$\frac{d^2}{dt^2}(r\mathbf{e}_r)=\frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{e}_r+\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\mathbf{e}_\vartheta+\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\mathbf{e}_\vartheta+r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\mathbf{e}_\vartheta-r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\mathbf{e}_r;$$

confrontando con l'equazione (1), e separando la componente radiale (cioè parallela a $\mathbf{e}_r$) e tangenziale (cioè parallela a $\mathbf{e}_\vartheta$) dell'accelerazione e della forza,

si ottengono due equazioni, le quali, considerate nel loro insieme, risultano equivalenti alla (1):

$$(2)\qquad \frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=-\frac{M}{r^2}$$

$$(3)\qquad 2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}+r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=0.$$

Si noti che il sistema cosí ottenuto è ancora costituito da due equazioni del secondo ordine (contenenti le derivate seconde); il sistema è perciò di «ordine» 4 nel senso che le variabili dinamiche (quelle le cui derivate compaiono nelle equazioni) sono quattro: r, ϑ e le loro derivate dr/dt, $d\vartheta/dt$. Il passo successivo fa uso della nozione fondamentale di integrale primo, indipendente dal tempo, vale a dire di una funzione della posizione $P(t)$ e della velocità $(dP/dt)(t)$, $h(P, dP/dt)$, tale da assumere un valore che, al variare di t e con esso di $P(t)$, $(dP/dt)(t)$, resta costante; cioè

$$\frac{d}{dt}h\left(P(t),\frac{dP}{dt}(t)\right)=0.$$

Il primo integrale primo fu scoperto (dalle osservazioni) da Keplero ed è l'integrale delle aree, o momento angolare $\mathcal{J}=r^2(d\vartheta/dt)$. Infatti

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt}=2r\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}+r^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=r\ \text{(primo membro della (3))}=r\cdot 0=0.$$

Perciò la (3) afferma proprio che $\mathcal{J}$ è un integrale primo, per ogni moto governato da una forza centrale: allora sostituendo la costante $\mathcal{J}$ a $r^2(d\vartheta/dt)$ nella (2), il sistema di equazioni diventa

$$(4)\qquad \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{\mathcal{J}^2}{r^3}-\frac{M}{r^2}$$

$$(5)\qquad \frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\mathcal{J}}{r^2}$$

cioè è stato ridotto all'ordine 3, poiché alla variabile dinamica $d\vartheta/dt$ è stata sostituita la variabile non dinamica, costante, lungo una soluzione, $\mathcal{J}$.

Un altro integrale primo è l'integrale dell'energia, che si trova per ogni equazione della forma (4) in questo modo: si cerchi una funzione $V(r)$, detta energia «potenziale», tale che la (4) diventi $d^2r/dt^2=-(dV(r)/dr)$. $V(r)$ si trova allora integrando il secondo membro della (4), e risulta $V(r)=(\mathcal{J}^2/2r^2)-(M/r)$ a meno di una costante. Allora

$$(6)\qquad E=T+V=\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+V(r)$$

è un integrale primo:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{dr}{dt}\frac{dV}{dr}=\frac{dr}{dt}\left(\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{dV}{dr}\right)=0.$$

Ma allora è possibile abbassare ancora di uno l'ordine del sistema (4) e (5); infatti dalla (6) si può ricavare dr/dt:

$$(7)\qquad \frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{2E-2V(r)}$$

e il sistema costituito dalla (7) e dalla (5) ha ordine 2, con due sole variabili dinamiche, r e ϑ, e due integrali primi, E e $\mathcal{J}$, che dipendono dalle condizioni iniziali ma non variano col tempo.

A questo punto si può integrare per quadrature il sistema costituito dalla (5) e dalla (7); infatti l'ordine del sistema può essere ulteriormente abbassato di uno eliminando la variabile indipendente (il tempo); applicando i teoremi della funzione inversa e della funzione composta si trova infatti che se si considera ϑ come funzione di r anziché di t si ha:

$$(8)\qquad \frac{d\vartheta}{dr}=\frac{\frac{d\vartheta}{dt}}{\frac{dr}{dt}}=\pm\frac{\mathcal{J}}{r^2\sqrt{2E-2V(r)}}.$$

Ora la (8) è un'equazione di ordine 1 a variabili separabili (si veda l'articolo «Differenziale» in questa stessa *Enciclopedia*) la cui soluzione è semplicemente data dall'uso dell'operazione inversa della derivazione, cioè dell'integrale

$$(9)\qquad \vartheta-\omega=\pm\int_{r_0}^{r}\frac{\mathcal{J}\,ds}{s^2\sqrt{2E-2V(s)}},$$

dove ω è una costante d'integrazione.

In linea di principio la formula (9), accompagnata dall'analoga «quadratura» che si può ricavare dalla (7)

$$(10)\qquad t-t_0=\pm\int_{r_0}^{r}\frac{ds}{\sqrt{2E-2V(s)}}$$

(dove t_0 è un'altra costante d'integrazione), costituisce una soluzione del problema dei due corpi, poiché consente di calcolare – eseguendo gli integrali – le funzioni $\vartheta=\vartheta(r)$, $t=t(r)$ e quindi – effettuando un'inversione – $r=f_1(t)$, $\vartheta=\vartheta(r(t))=f_2(t)$ cioè la soluzione $P(t)$ come funzione del tempo in coordinate polari.

Vale la pena però di osservare che la «quadratura» (9) possiede una forma molto particolare, poiché la funzione integranda al secondo membro è abbastanza semplice: allora è possibile esprimere l'integrale (9) in termini finiti mediante la funzione trigonometrica inversa «arco il cui coseno è...» in questo modo:

$$(11)\qquad \vartheta-\omega=\pm\arccos\frac{\frac{\mathcal{J}}{r}-\frac{M}{\mathcal{J}}}{\sqrt{2E+\frac{M^2}{\mathcal{J}^2}}}.$$

Da questa formula, per inversione (cioè ricavando r in funzione di ϑ), si ottiene la nuova formula

$$(12) \qquad r = \frac{\mathcal{J}^2/M}{1+\sqrt{1+\frac{2E\mathcal{J}^2}{M^2}}\cos(\vartheta-\omega)}$$

che è l'equazione – in coordinate polari – di una sezione conica di eccentricità $e^2=(1+2E\mathcal{J}^2)/M^2$, cioè un'ellisse per $0<e<1$; una circonferenza per $e=0$; una parabola per $e=1$, un ramo di iperbole per $e>1$.

Allora la legge della traiettoria (12) assegna la curva su cui si muoverà la soluzione $P(t)$, mentre la legge oraria (10) assegna i tempi di percorrenza della traiettoria stessa. Si noti che l'equazione (12) (oppure (11)) si può interpretare come la definizione di un terzo integrale primo ω, indipendente dal tempo, $\omega=\omega(P, dP/dt)$, mentre la (10) definisce l'integrale primo dipendente dal tempo $t_0=t_0(P, dP/dt, t)$ che è pure costante al variare di t. Perciò la conoscenza di tre integrali primi indipendenti dal tempo E, $\mathcal{J}$, ω e di un quarto integrale primo dipendente dal tempo, t_0, determina esattamente la soluzione: in questo caso poi i tre integrali primi E, $\mathcal{J}$, ω sono noti esplicitamente come combinazioni di funzioni elementari, mentre t_0 è ricavabile solo tramite l'integrale (10) di cui non si conosce un'espressione finita mediante funzioni elementari.

Prima di passare a considerare un piú complicato problema degli n corpi con $n>2$, conviene soffermarsi un poco sulle straordinarie caratteristiche della soluzione, qui frettolosamente presentata, del problema dei due corpi. La prima caratteristica stupefacente di questa soluzione è che il procedimento seguito per ottenerla è molto semplice, relativamente all'importanza del problema; tuttavia tale semplicità è solo apparente, perché essa è ottenuta dando per scontate le proprietà delle operazioni di derivazione e integrazione, cioè di quel calcolo infinitesimale che si fondava, non solo all'epoca di Newton ma ancora per tutto il Settecento, su principî incerti e poco accettabili dal punto di vista del rigore logico (cfr. su questo aspetto gli articoli «Calcolo», «Differenziale» e «Infinitesimale» in questa stessa *Enciclopedia*), e che ancora oggi costa non poca fatica per essere appreso in tutto rigore da chi intraprende studi scientifici. Ma l'importanza storica decisiva del problema dei due corpi consiste proprio nel fatto che il successo strepitoso ottenuto dalla soluzione di Newton del problema (nel predire i risultati osservativi dell'astronomia del sistema solare) costrinse gli scienziati – dopo un breve periodo di resistenza – ad accettare i procedimenti del calcolo infinitesimale come atti a costituire modelli matematici della realtà, malgrado la stessa incertezza dei fondamenti logici, incertezza che fu sciolta solo 150 anni dopo da Cauchy e dai suoi successori. In particolare, il modello della realtà fisica basato sulle equazioni differenziali ordinarie come la (1) – derivate seconde delle posizioni uguali alle forze impresse – s'impose come il modello matematico della realtà per eccellenza («meccanicismo»).

Allora ciò che importa mettere in rilievo della soluzione del problema dei

due corpi (che è stato presentato nella forma datagli da Bernoulli nel 1710, quando le riserve sul calcolo infinitesimale che avevano imbarazzato lo stesso Newton, costringendolo a una presentazione ibrida, potevano ormai essere superate dagli scienziati piú all'avanguardia) è che la ragione principale di tale successo nel predire i risultati osservativi è che tale soluzione possiede straordinarie caratteristiche di stabilità.

Infatti si supponga che le osservazioni astronomiche diano i valori delle «osservabili» posizione e velocità al tempo $t=0$. (In realtà non è proprio cosí, poiché le osservazioni astronomiche forniscono solo posizioni e non velocità; a questo caso ci si può però ricondurre con vari metodi, studiati da Laplace, Gauss e altri). Da queste è possibile calcolare gli integrali primi E, $\mathcal{J}$, ω, t_0 con le formule viste; ora, usando le stesse formule al contrario, dati E, $\mathcal{J}$, ω, t_0 è possibile calcolare il valore di $P(t)$, e se occorre dP/dt, a un tempo arbitrario $t\neq 0$, usando formule esplicite come la (12) e dando soluzioni approssimate ad equazioni che contengono integrali come la (10) (o in realtà risolvendo l'equivalente «equazione di Keplero»). Il calcolo della predizione $P(t)$ può essere eseguito con la precisione voluta, pur di dedicare un tempo sufficiente – e del resto ragionevole – ai calcoli. Ora però i parametri da cui dipende la soluzione – cioè il parametro M (massa del corpo attirante) e gli integrali primi E, $\mathcal{J}$, ω, t_0 – sono funzione delle osservabili posizione e velocità iniziali, che sono note solo con una certa approssimazione. Si supponga allora che le condizioni iniziali osservate siano diverse da quelle «vere»: allora i valori calcolati dagli integrali primi saranno diversi da quelli «veri»: però E, $\mathcal{J}$, ω, t_0 sono funzioni continue dei dati P, dP/dt, cioè variano di arbitrariamente poco purché P, dP/dt varino in misura opportunamente piccola: piú rigorosamente (si prenda per esempio $\mathcal{J}$) per ogni numero reale $\varepsilon>0$, esiste un numero reale $\delta>0$ che dipende da ε, tale che se le «osservazioni» differiscono dalle posizioni e velocità «vere» per meno di δ, allora il valore calcolato di $\mathcal{J}$ differisce da quello «vero» per meno di ε (cfr. l'articolo «Infinitesimale» in questa stessa *Enciclopedia*).

A sua volta il valore predetto di $P(t)$ a un dato istante $t=t_1$ dipende in modo continuo dagli integrali primi E, $\mathcal{J}$, ω, t_0 (e dal parametro M). Allora la «funzione composta» che a partire dalle «condizioni iniziali» al tempo $t=0$ fornisce la predizione al tempo $t=t_1$ è pure continua, e quindi la predizione è vicina quanto si vuole alla «realtà» purché le osservazioni siano abbastanza buone.

Questo primo e piú semplice tipo di stabilità, la «continuità rispetto alle condizioni iniziali», non è una proprietà caratteristica delle equazioni (1) del problema dei due corpi, ma è una proprietà di ogni equazione differenziale ordinaria dotata di un secondo membro che soddisfi opportune ipotesi di «regolarità», per esempio che sia «lipschitziano» (cfr. in questa stessa *Enciclopedia* l'articolo «Differenziale», IV, pp. 763 sgg.); questo però fu dimostrato in modo rigoroso solo nell'Ottocento.

Ma le equazioni del problema dei due corpi possiedono un altro tipo di stabilità che è invece molto raro, tra le equazioni differenziali, anzi quasi unico: ci si limiti a considerare, tra le traiettorie descritte dalla (12), quelle con $e^2=1+[(2E\mathcal{J}^2)/2]<1$, cioè le orbite ellittiche. Poiché l'ellisse è una curva chiu-

sa, se $P(t)$ percorre un'ellisse ripasserà successivamente dallo stesso punto dopo un certo tempo T (detto «periodo»), cioè $P(T+t)=P(t)$. Se le condizioni iniziali variano di poco, $P(t)$ percorrerà ancora un'ellisse vicina a quella precedente, e l'orbita sarà ancora periodica nel senso che $P(T_1+t)=P(t)$ con un periodo T_1 diverso, sebbene di poco, da T. Ma la predizione che l'orbita sia periodica sarà soddisfatta lo stesso; per di piú tale orbita, ripetendosi infinite volte, non si avvicinerà all'origine a meno di una distanza minima e neppure si allontanerà mai al di là di una distanza massima, che possono essere ricavate entrambe dalla (12). Perciò, per un tempo arbitrariamente lungo nel futuro o nel passato, il corpo P non potrà sfuggire all'infinito né collidere con l'altro corpo che lo attira, posto in O; e per di piú la validità di tale previsione non è alterata da un errore – abbastanza piccolo – nella determinazione delle condizioni iniziali.

Non solo: ma se l'errore nelle condizioni iniziali è abbastanza piccolo, l'orbita prevista $\tilde{P}(t)$ differirà da quella «vera» $P(t)$, ma le due ellissi saranno vicine, con distanza massima che tende a 0 quando la differenza nelle condizioni iniziali tende a 0. Quest'ultima proprietà va talvolta sotto il nome di «stabilità alla Lagrange» o «stabilità orbitale». Viceversa non è vero che se l'errore nelle condizioni iniziali, $P(0)-\tilde{P}(0)$, e cosí $(dP/dt)(0)-(d\tilde{P}/dt)(0)$, tende a zero, allora $P(t)-\tilde{P}(t)$ tende a zero per ogni t. Infatti se le condizioni iniziali sono di poco errate, il periodo predetto T_1 sarà diverso da quello vero T_0 e perciò $\tilde{P}(t)$ sarà sí su di un'ellisse vicina a quella su cui si muove $P(t)$, ma col passare del tempo si troverà in una posizione sempre piú distinta (in angolo rispetto all'origine) da quella in cui si trova $P(t)$ allo stesso istante t: gli errori si accumulano col tempo lungo l'orbita, mentre vi è stabilità per gli errori perpendicolari all'orbita stessa. Si dice perciò che il problema dei due corpi non è «stabile secondo Ljapunov».

Questo ha conseguenze molto importanti nelle applicazioni: se gli errori commessi nel misurare il periodo di una soluzione del problema dei due corpi si accumulano nel tempo come errori di previsione della posizione futura, è vero viceversa che ripetendo la misurazione su piú periodi consecutivi si accumula informazione sul valore esatto del periodo.

Perciò le grandezze legate al periodo dei pianeti del sistema solare (come la durata di un anno, e la grandezza M ad essa collegata, cioè la massa del Sole moltiplicata per la costante di gravitazione universale, ovvero la costante di gravitazione universale in unità astronomiche in cui la massa del Sole è 1) sono le grandezze fisiche note con maggior precisione. (Per contrasto, si può notare che la costante di gravitazione universale in unità di misura terrestri è la costante fisica peggio nota, con neppure tre cifre significative certe).

D'altro canto l'accumulazione degli errori lungo la traiettoria ha effetti molto negativi nel calcolo numerico; se si cerca di calcolare la traiettoria di un corpo celeste partendo dalle equazioni differenziali che generalizzano la (1) e integrandole numericamente con un veloce calcolatore elettronico della generazione oggi in uso, l'errore finale lungo la traiettoria sarà «probabilmente» proporzionale a $t^{3/2}$ dove t è l'intervallo di tempo a cui si vuole estendere la predizione (e solo a $t^{1/2}$ l'errore in direzione perpendicolare alla traiettoria) perciò nessun calcolatore, per quanto potente, può essere usato per calcolare numericamente un'orbita per piú di qualche migliaio di periodi. Questo ha effetti importanti anche sulla ricerca teorica.

3. *Perturbazioni ed equazioni di Hamilton.*

Ma il vero problema di stabilità del problema dei due corpi è un altro, e cioè quello della stabilità rispetto alle modifiche del modello fisico, alle «perturbazioni» nella terminologia classica. Si supponga cioè che oltre all'attrazione del corpo posto in O agisca su P un'altra forza, piccola ma presente a ogni tempo t.

Per esempio si può supporre che il corpo in O non sia sferico, per cui la sua attrazione gravitazionale non è sempre rivolta verso il centro geometrico O (problema del satellite); oppure si può supporre che i corpi in gioco siano tre, ciascuno dotato di massa e quindi capace di attirare ciascuno degli altri due (problema dei tre corpi).

Per comodità di esposizione si usa anche prendere come esempio il caso in cui vi siano tre corpi, di cui due – P_1 e P_2 – dotati di massa finita m_1, m_2 e uno P_3 considerato come «particella di prova» cioè attratto da P_1, P_2 ma privo di influenza su di essi; allora P_1 e P_2 si muoveranno su orbite soluzioni del problema dei due corpi, come ad esempio due circonferenze con centro in O e raggi inversamente proporzionali alle rispettive masse (problema ristretto dei tre corpi).

Per intendere questo problema come «perturbazione» del problema dei due corpi in cui vi sono solo P_1 fisso in O di massa $m_1=M$ e P_3, basta supporre che P_2 abbia massa m_2 molto piú piccola di m_1; cioè si fa tendere a zero il «parametro perturbativo» $\mu=m_2/(m_1+m_2)$. Ci si chiede allora se valga una qualche forma di stabilità rispetto al variare di μ, cioè se per valori di μ abbastanza piccoli l'orbita di P_3, pur non essendo piú esattamente una conica, per esempio un'ellisse, conservi la proprietà di non avvicinarsi né a P_1 né a P_2 a meno di una distanza costante, e di non sfuggire all'infinito.

Studiare questo problema di facile enunciazione richiede però un apparato matematico notevole, indicato tradizionalmente come «teoria delle perturbazioni». L'idea base è quella di esprimere le equazioni di moto del problema dei due corpi, e quindi anche del problema «perturbato», in un sistema di coordinate tali che le soluzioni del problema «imperturbato» abbiano forma particolarmente semplice, espresse per esempio da funzioni costanti o lineari del tempo. Allora l'effetto delle perturbazioni sarà quello di far variare lentamente le grandezze che non sono piú costanti e di variare di poco le velocità che non sono piú costanti. Se tali variazioni sono abbastanza piccole, l'orbita di P_3 conserverà un comportamento «stabile» (per esempio evitando le collisioni con P_1 e P_2) per un periodo di tempo abbastanza lungo, e si presterà ad essere calcolata mediante opportuni procedimenti di approssimazione.

Quali siano le grandezze conservate dalle soluzioni del problema dei due corpi è chiaramente indicato dalle formule (3), (6) e (9): sono cioè il momento

angolare $\mathcal{J}$, l'energia totale E e l'angolo ω che indica la direzione del pericentro: queste tre grandezze definiscono una conica di eccentricità, semiasse e orientazione dati. La quarta coordinata che occorre dovrebbe essere una funzione lineare del tempo $l=n(t-t_0)$, dove n può anche dipendere dagli altri integrali primi. Si tratta di vedere se esiste un tale sistema di coordinate, atto a descrivere tutte le soluzioni (o almeno quelle ellittiche) del problema dei due corpi, e in che modo è possibile scrivere le equazioni di moto del sistema perturbato in tale sistema di coordinate.

La soluzione, anzi le soluzioni, via via piú eleganti e raffinate, di questo problema, sono il risultato di quell'arco di circa cent'anni di studi che oggi è considerato l'epoca della meccanica celeste «classica», da Clairaut a Jacobi. Non si può certo ripercorrere tale strada, che può essere seguita sui trattati «classici» (Laplace, Jacobi, Tisserand, Brouwer e Clemence): ci si limita a citare la forma moderna della teoria delle trasformazioni delle equazioni della meccanica. Questa si applica alle equazioni differenziali che sono poste nella forma «di Hamilton» (cfr. in questa stessa *Enciclopedia* l'articolo «Differenziale», IV, § 3.3), cioè che sono definite da una «funzione hamiltoniana» $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ($\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ sono vettori: $\mathbf{q}=(q_1, \ldots, q_m)$, $\mathbf{p}=(p_1, \ldots, p_m)$) mediante le formule:

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad i=1, 2, \ldots, m.$$

Le equazioni del problema dei due corpi si possono porre in tale forma pur di scegliere come coordinate q_1, q_2 delle coordinate di P nel piano, per esempio le coordinate polari r, ϑ, e come p_1, p_2 i momenti coniugati, in questo caso la velocità radiale dr/dt e il momento angolare $\mathcal{J}=r^2(d\vartheta/dt)$: allora la funzione di Hamilton del problema dei due corpi è

$$(14)\qquad H(q_1, q_2, p_1, p_2)=\frac{1}{2}\left[p_1^2+\frac{p_2^2}{q_1^2}\right]-\frac{1}{q_1},$$

ossia, come si verifica dalla (6), $H(q_1, q_2, p_1, p_2)=E$ è l'integrale primo dell'energia. (Si è «normalizzata» la massa del primario M a 1, supponendo di effettuare un opportuno cambiamento di unità di misura). Le equazioni di Hamilton sono allora:

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt}=p_1 \qquad \dfrac{dq_2}{dt}=\dfrac{p_2}{q_1^2} \\ \dfrac{dp_1}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial q_1}\left(\dfrac{p_2^2}{2q_1^2}-\dfrac{1}{q_1}\right) \qquad \dfrac{dp_2}{dt}=0. \end{cases}$$

Tutto questo è naturalmente solo un modo diverso di scrivere cose note, poiché le prime due delle (15) sono proprio le definizioni dei due momenti $p_1=dr/dt$ e $p_2=r^2(d\vartheta/dt)$, la quarta esprime il fatto che $p_2=\mathcal{J}$ è un integrale primo, e la terza coincide con la (4). Però la formulazione (15) ha due vantaggi fondamentali. Il primo è che se si vuole aggiungere l'effetto perturbativo dello sdoppiamento della massa 1 posta in O nella coppia di masse $1-\mu$ e μ poste in P_1 e P_2 che si muovono attorno ad O, basta calcolare l'energia potenziale gravitazionale dei due corpi e sostituirla al termine $-(1/q_1)=-(1/r)$ che esprimeva l'energia potenziale gravitazionale di un solo corpo: ossia basta aggiungere alla hamiltoniana (14) una funzione perturbatrice R,

$$(16)\qquad R(q_1, q_2, p_1, p_2, t)=\frac{1}{r}-\frac{1-\mu}{r_1(t)}-\frac{\mu}{r_2(t)},$$

dove r_1, r_2 sono le distanze di P_3 da P_1, P_2 rispettivamente.

Il secondo vantaggio consiste nella possibilità di effettuare trasformazioni di coordinate in modo relativamente semplice: basta assegnare una «funzione generatrice» $S=S(\mathbf{q},\mathbf{L})$ ($\mathbf{L}$ un vettore $\mathbf{L}=(L_1, L_2, \ldots, L_m)$); poi mediante le formule

$$(17)\qquad \begin{aligned} p_j&=\frac{\partial S}{\partial q_j}(\mathbf{q},\mathbf{L}) \\ l_j&=\frac{\partial S}{\partial L_j}(\mathbf{q},\mathbf{L}) \end{aligned} \qquad j=1, 2, \ldots, m$$

si definisce una trasformazione canonica dalle vecchie coordinate $\mathbf{q}$ e momenti $\mathbf{p}$ alle nuove coordinate $\mathbf{l}$ e momenti $\mathbf{L}$ (sotto opportune condizioni di regolarità e non-degenerazione, che non vale la pena di precisare qui [cfr. Goldstein 1950]).

Il vantaggio di una trasformazione «canonica» consiste nel fatto che nel nuovo sistema di coordinate $\mathbf{l}$, $\mathbf{L}$ le equazioni di Hamilton (13) si scrivono ancora come equazioni di Hamilton:

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{dl_j}{dt}=\dfrac{\partial K}{\partial L_j} \\ \dfrac{dL_j}{dt}=-\dfrac{\partial K}{\partial l_j} \end{cases} \qquad j=1, 2, \ldots, m$$

dove la nuova hamiltoniana K si ottiene semplicemente sostituendo le nuove variabili nella vecchia funzione di Hamilton H, cioè $K(\mathbf{l},\mathbf{L})=H(\mathbf{q}(\mathbf{l},\mathbf{L}), \mathbf{p}(\mathbf{l},\mathbf{L}))$ (teorema di Hamilton). Non solo: poiché la funzione S può essere scelta arbitrariamente, si può cercare una «funzione generatrice» S tale da soddisfare a opportune condizioni; per esempio si può imporre a K di dipendere solo dai nuovi momenti $\mathbf{L}$ e non dalle $\mathbf{l}$, il che impone alla S di soddisfare all'equazione (detta di Hamilton-Jacobi)

$$(19)\qquad H\left[\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{L})\right]=K(\mathbf{L})$$

che è un'equazione alle derivate parziali. Se una funzione nota $S=S(\mathbf{q},\mathbf{L})$ è soluzione della (19), allora è nota la trasformazione definita dalle (17) che ri-

duce il sistema di equazioni (13) alla forma (18) con però $K=K(\mathbf{L})$, cioè $\partial K/\partial l_j=0$, e cioè alla forma

$$\begin{aligned} &\frac{dL_j}{dt}=0 \\ &\frac{dl_j}{dt}=\frac{\partial K}{\partial L_j}(\mathbf{L}) \end{aligned} \qquad j=1, 2, \ldots, m$$

nella quale si legge che i nuovi momenti L_j sono tutti integrali primi e le coordinate l_j variano linearmente col tempo:

$$\begin{aligned} &L_j=\text{cost} \\ &l_j=\omega_j(\mathbf{L})t+\text{cost} \qquad j=1, 2, \ldots, m \\ &\omega_j(\mathbf{L})=\frac{K(\mathbf{L})}{L_j} \end{aligned}$$

il che è esattamente quello che occorre per lo sviluppo di una teoria perturbativa.

Purtroppo l'equazione (19) è assai difficile da integrare: poiché la (19) è un'equazione differenziale «alle derivate parziali» di S e non «alle derivate ordinarie» come la (13), è in effetti assai piú difficile integrare la (19) che la (13), e il numero di problemi «hamiltoniani» per i quali si conosce una soluzione completa dell'equazione di Hamilton-Jacobi non supera la mezza dozzina. E tuttavia sono questi «sistemi integrabili» quelli che possono essere posti alla base di una teoria delle perturbazioni: il problema dei due corpi rientra appunto fra questi. Data infatti la funzione di Hamilton (14), l'equazione di Hamilton-Jacobi corrispondente è

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial S}{\partial q_1}\right]^2+\frac{1}{2q_1^2}\left[\frac{\partial S}{\partial q_2}\right]^2-\frac{1}{q_1}=K(L_1,L_2) \tag{20}$$

che può essere risolta per «separazione di variabili», cioè cercando una soluzione $S(q_1,q_2,L_1,L_2)$ che sia somma di una funzione della q_1 e di una funzione di q_2: $S=S_1(q_1,L_1,L_2)+S_2(q_2,L_1,L_2)$, da cui la (20) si separa in due equazioni «ordinarie» per la semplice ragione che le due parti dipendenti solo da q_1 e solo da q_2 del primo membro della (20) devono essere entrambe costanti: $\partial S_2/\partial q_2=p_2=\text{cost}$. Per cui si può assumere che $L_2=p_2$, visto che p_2 è un integrale primo; e inoltre

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_1}=\pm\sqrt{2K(\mathbf{L})+\frac{2}{q_1}-\frac{L_2^2}{q_1^2}}. \tag{21}$$

A questo punto è ancora del tutto arbitraria la scelta della funzione $K(L_1,L_2)$ per cui si può scegliere per semplicità $K=K(L_1)$; S risulta allora per integrazione diretta:

$$S=q_2L_2\pm\int\left[2K(L_1)+\frac{2}{q_1}-\frac{L_2^2}{q_1^2}\right]^{1/2}dq_1$$

e le nuove coordinate l_1, l_2 si ottengono quindi applicando la regola (17): in particolare

$$l_2=\frac{\partial S}{\partial L_2}=q_2\pm\int\frac{-L_2\,dq_1}{q_1^2\sqrt{2K(L_1)+\frac{2}{q_1}-\frac{L_2^2}{q_1^2}}}. \tag{22}$$

Queste formule possono apparire complicate, ma in realtà la (21) coincide con la (7), che esprime la velocità radiale, poiché $(\partial S/\partial q_1)=p_1=(dr/dt)$; e la (22) è esattamente la (9), per cui l_2 è proprio l'angolo ω che esprime l'orientamento dell'ellisse. Allora, scelta la funzione $K(L_1)$, si definisce una trasformazione canonica in cui l_2, L_1, L_2 sono integrali primi, e $l_1=n(t-t_0)$ è una funzione lineare del tempo con $n=(dK/dL_1)(L_1)$. A questo punto per scrivere le equazioni del moto perturbato basta aggiungere alla hamiltoniana una funzione perturbatrice, come per esempio la (16) per il problema ristretto dei tre corpi (ma il procedimento vale per qualunque perturbazione gravitazionale); allora, poiché la trasformazione canonica non cambia la funzione hamiltoniana (non ne cambia il valore nei punti corrispondenti per la trasformazione), la nuova hamiltoniana nelle variabili l_1, l_2, L_1, L_2 sarà

$$K(L_1)+R=H(q_1, q_2, p_1, p_2)+R, \tag{23}$$

dove naturalmente R deve essere espressa in funzione di l_1, l_2, L_1, L_2 e t. Le equazioni di Hamilton del moto perturbato nelle nuove variabili saranno allora:

$$\begin{aligned} &\frac{dL_1}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial l_1} \qquad \frac{dL_2}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial l_2} \\ &\frac{dl_1}{dt}=n+\frac{\partial R}{\partial L_1} \qquad \frac{dl_2}{dt}=\frac{\partial R}{\partial L_2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Le (24) vanno solitamente sotto il nome di «equazioni di Delaunay»; si noti che a parte il termine $n=\partial K/\partial L_1$, tutta la parte restante dei secondi membri tende a 0 per μ tendente a 0; infatti per $\mu=0$, R è nulla come si vede dalla definizione (16) (se $\mu=0$, P_1 ha massa 1 e sta in O, mentre P_2 non esercita alcuna influenza), d'altro canto R è una funzione continua di μ. A questo punto si supponga che μ sia piccolo ma diverso da zero: per esempio nel sistema solare i due corpi piú importanti sono il Sole e Giove, con la massa di Giove che è 1/1047 circa di quella del Sole, per cui si può descrivere abbastanza bene il moto di un piccolo pianeta come la Terra come un problema ristretto dei tre corpi con $\mu=0{,}00095$. Nel sistema di Delaunay (24) i secondi membri sono piccoli (salvo la «costante» n), dello stesso ordine di grandezza di μ: l'effetto accumulato in un tempo molto lungo di queste «piccole» perturbazioni può essere tale da cambiare le quantità L_1 (quindi $K(L_1)=E$, l'energia) e L_2 (cioè $\mathcal{J}$, il momento angolare) di quantità arbitrariamente grandi, oppure no? Non si può ottenere una conclusione del genere soltanto dalla «piccolezza» dei secondi membri dell'equazione (24). Sapere infatti che la derivata di una gran-

dezza è piccola con μ, si supponga per esempio $-\mu < (df/dt) < \mu$, non impedisce affatto che $f(t)-f(0)$ abbia un valore dell'ordine di 1 purché t sia dell'ordine di $1/\mu$. Poiché l'età del sistema solare è pari a circa 4,6 miliardi di anni (nelle unità qui usate, t arriva a circa 3 miliardi), questo non dice molto sulla stabilità del sistema solare. Ma c'è di peggio: è vero che la funzione perturbatrice R (16) è nulla per $\mu = 0$, ma non è vero che R sia piú piccola in valore assoluto di $c\mu$, con c una costante opportuna, e meno ancora questo è vero per le sue derivate. In termini fisici, l'effetto prodotto dalla piccola massa in P_2 è piccolo con la massa se si resta al di là di una distanza minima da P_2, ma tende all'infinito per r_2 (distanza da P_2) tendente a zero qualunque sia μ maggiore di zero. Cosí Giove, pur essendo mille volte meno massiccio del Sole, esercita tuttavia un'influenza che è maggiore di quella esercitata dal Sole sui corpi abbastanza vicini, per esempio sui suoi quattordici e piú satelliti, che infatti gli ruotano attorno.

Naturalmente se il corpo P_3 percorre un'orbita che – per un tempo piccolo rispetto a $1/\mu$ – resterà vicina all'ellisse soluzione per $\mu = 0$, le forze indotte dall'attrazione di P_2 non avranno sempre la stessa direzione, per cui il loro effetto non si accumulerà del tutto nel tempo. Si può allora tentare di calcolare un effetto perturbativo «medio» di P_2? È chiaro che mediare rispetto al tempo, cioè calcolare degli integrali del tipo

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} L_1(t)\, dt$$

e simili, comporta appunto di conoscere la soluzione $L_1(t)$ nell'intervallo tra t_0 e t_1, per cui non è possibile un approccio diretto.

4. *Variabili azione-angolo e principio della media.*

Perché si comprendessero i fondamenti – e le lacune – dei metodi perturbativi del paragrafo precedente, fu necessario acquisire una visione geometrica globale della natura dei problemi integrabili (come quello dei due corpi) e dell'effetto delle perturbazioni; il che avvenne solo nella seconda metà del secolo scorso.

Si ritorni alla hamiltoniana (14) dei due corpi che, come si è visto, definisce un sistema di Hamilton (15) dotato di due integrali primi: l'energia $H = E$ e il momento angolare $p_2 = \mathcal{J}$.

Si supponga allora di considerare non una particolare soluzione delle (15), ma la totalità delle soluzioni che hanno valori fissati di E, $\mathcal{J}$ – e quindi di L_1, L_2 – nel sistema di coordinate definito dall'integrazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi. Queste soluzioni formano una superficie; non si tratta di una superficie nello spazio ordinario, poiché lo spazio delle fasi in cui si svolge il moto ha quattro dimensioni, cioè è parametrizzato da quattro numeri reali $x, y, (dx/dt), (dy/dt)$ oppure $r, \vartheta, (dr/dt), (d\vartheta/dt)$ oppure l_1, l_2, L_1, L_2; si tratta però di una varietà a due dimensioni (cfr. in questa stessa *Enciclopedia* l'articolo «Geometria e topologia», VI, § 5.1) descritta da due parametri, per esempio l_1, l_2.

Per comprendere la geometria di una tale superficie, si può osservare che delle due coordinate che la descrivono, l_2 è un angolo, il che significa che se l_2 viene incrementato di 2π (cioè di un angolo giro), ferme restando l_1, L_1, L_2, il punto cosí rappresentato nello spazio delle fasi resta lo stesso. Ma anche l_1 è definito a meno di un periodo: infatti le soluzioni ellittiche ($E<0$) sono periodiche rispetto al tempo, cioè quando t cresce a $t+T$, la soluzione ripassa dallo stesso punto e con la stessa velocità (cioè dallo stesso punto dello spazio delle fasi). Ma nell'intervallo di tempo T, l_1 cresce di nT, e perciò anche un incremento di Tn di l_1 riporta allo stesso punto perché l_2, L_1, L_2 siano costanti come lo sono su di un'ellisse fissa. Basta perciò che $nT = 2\pi$ perché l_1 possa pure essere considerato un angolo. Ora la funzione $K(L_1)$ è arbitraria, perciò si può scegliere in modo tale che $n(L_1) = (dK/dL_1)(L_1) = 2\pi/T$: basta porre

$$(25) \qquad K(L_1) = -\frac{1}{2L_1^2} \qquad n(L_1) = \frac{1}{L_1^3}.$$

In effetti la (25) altro non è che la terza legge di Keplero: «I quadrati dei periodi sono inversamente proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori», visto che in questo modo risulta che L_1^2 è il semiasse maggiore dell'ellisse. Con questa scelta, l_1 e l_2 sono angoli (definiti a meno di multipli di 2π) e perciò la varietà di livello $H = E$, $p_2 = \mathcal{J}$ è un toro, prodotto di due circonferenze (cfr. fig. 1).

Questo risultato geometrico è stato ottenuto sfruttando le particolari proprietà delle soluzioni ellittiche del problema dei due corpi; ma in effetti esso ha carattere assai piú generale, come hanno dimostrato Arnol'd e Jost. Qualunque sistema hamiltoniano con una hamiltoniana $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ a «due gradi di libertà» (cioè q, p in $\mathbf{R}^2$), dotato di due integrali primi H ed F «funzionalmente indipendenti» (cioè che non sono esprimibili l'uno come funzione dell'altro), ammette «varietà di livello» di dimensione 2 regolari. Ebbene, se tali varietà di livello sono compatte (cfr. per la definizione l'articolo «Geometria e topologia» in questa stessa *Enciclopedia*: in pratica occorre che soluzioni aventi quei dati valori fissi H ed F non possano né andare all'infinito né avvicinarsi indefinitamente a «singolarità» della funzione hamiltoniana come la collisione $r = 0$ nel problema dei due corpi), allora esse sono necessariamente dei tori, e per di piú esiste un sistema di variabili dette azione-angolo a cui ci si può ricondurre con una trasformazione canonica, tali che le variabili azione L_1, L_2 definiscono il

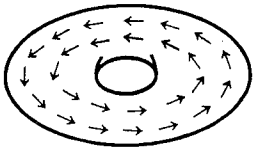


Figura 1.
La varietà di livello è un toro, prodotto di due circonferenze.

toro su cui ci si muove, e le variabili angolo l_1, l_2 parametrizzano il toro, con equazioni di moto nel nuovo sistema di coordinate della forma

$$(26)\qquad \begin{aligned} \frac{dl_1}{dt} &= \omega_1(L_1, L_2) & \frac{dl_2}{dt} &= \omega_2(L_1, L_2) \\ \frac{dL_1}{dt} &= 0 & \frac{dL_2}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

È facile verificare che le (26) equivalgono a supporre che la nuova hamiltoniana nelle variabili $\mathbf{l}$, $\mathbf{L}$ deve essere della forma $K = K(L_1, L_2)$, indipendente da l_1 ed l_2. È anche chiaro che il teorema di Arnol'd-Jost assicura proprio la forma del sistema hamiltoniano richiesta per l'applicazione di una teoria perturbativa. Anche se, per semplicità, ci si è limitati al caso $m = 2$ di due coordinate, due momenti e due integrali primi, va citato che il teorema di Arnol'd-Jost vale pure per qualsiasi sistema hamiltoniano con hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ con $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ vettori a m componenti, purché vi siano m integrali primi $H, F_2, \ldots, F_m$ funzionalmente indipendenti, con la condizione aggiuntiva che questi «commutino tra loro», cioè che se si prende uno qualsiasi di essi come hamiltoniana, il sistema hamiltoniano che ne risulta abbia gli stessi integrali primi $H, F_2, \ldots, F_m$. In questo caso le variabili azione L_j sono m, quelle angolo l_j pure m, e le «varietà di livello» se compatte sono tori m-dimensionali, cioè il prodotto di m circonferenze [cfr. Arnol'd e Avez 1967].

Allora per ogni sistema hamiltoniano «integrabile nel senso di Arnol'd e Jost», cioè con abbastanza integrali primi che commutano tra loro, si può definire una teoria delle perturbazioni trattando le hamiltoniane perturbate come una serie di potenze in un parametro perturbativo:

$$(27)\qquad H(\mathbf{l}, \mathbf{L}, \mu) = H_0(\mathbf{L}) + \mu R_1(\mathbf{l}, L) + \mu^2 R_2(\mathbf{l}, \mathbf{L}) + \ldots$$

dove H_0 è la hamiltoniana del sistema integrabile, ridotta alla forma dipendente solo dalle $\mathbf{L}$ (come nel sistema hamiltoniano (26)). Allora le equazioni di Delaunay definite dall'hamiltoniana (27) sono della forma

$$(28)\qquad \begin{aligned} \frac{dL_j}{dt} &= -\mu \frac{\partial R_1}{\partial l_j} - \mu^2 \frac{\partial R_2}{\partial l_j} + \ldots \\ \frac{dl_j}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial L_j}(L) + \mu \frac{\partial R_1}{\partial L_j} + \mu^2 \frac{\partial R_2}{\partial L_j} + \ldots \end{aligned}$$

Per dare un senso al procedimento delle (27) e (28), che altrimenti è puramente formale, occorre supporre che μ sia piccolo; per esempio, come nel caso del problema ristretto Sole-Giove-Terra, μ sia circa $1/1000$; allora i termini che hanno a fattore μ^2 sono «piú piccoli» di 1 milione di volte di quelli principali, e cosí via, e perciò sono «trascurabili» in una prima approssimazione alle soluzioni del problema.

In questo contesto si può enunciare il principio della media (nella terminologia moderna) o dei termini secolari (nella terminologia «classica» di Lagrange): si consideri il sistema mediato dato da variabili $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_m)$ che soddisfino a equazioni

$$(29)\qquad \frac{d\mathcal{J}_1}{dt} = -\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} \frac{\partial R_1}{\partial l_1} dl_1$$

e simili per $\mathcal{J}_2, \ldots, \mathcal{J}_m$, dove il secondo membro è ottenuto «mediando» su di un toro T_m (del teorema di Arnol'd-Jost) il termine del primo ordine in μ della «perturbazione». Ora, se le l_j sono variabili angolo definite a meno di multipli di 2π, R_1 deve essere una funzione periodica di periodo 2π in ciascuna delle variabili l_j, perciò

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial R}{\partial l_j} dl_j = R(2\pi, l_2, \ldots, l_m, L_1, \ldots, L_m) - R(0, l_2, \ldots, l_m, L_1, \ldots, L_m) = 0$$

e quindi il secondo membro della (29) è in realtà nullo, e le $\mathcal{J}_j$ sono costanti. Adesso si confrontino le soluzioni del sistema perturbato (28) e quelle del sistema mediato (29), confrontando le variabili azione I_j soluzione del primo con le variabili azione mediate $\mathcal{J}_j$ soluzione del secondo, nell'ipotesi che le condizioni iniziali siano le stesse, $\mathcal{J}_j(0) = I_j(0)$. Allora il principio della media sostiene piú o meno che le $\mathcal{J}_j$ sono una buona approssimazione delle I_j mediate su di un tempo abbastanza lungo, cioè la media su di un toro approssima bene la media temporale [cfr. Arnol'd 1974]: in altri termini l'andamento delle variabili azione I_j nel tempo è approssimabile bene (al primo ordine in μ) con un andamento secolare espresso dalle $\mathcal{J}_j$ piú termini periodici. Volendo formalizzare si potrebbe dire che per un tempo molto lungo (dell'ordine di $1/\mu$) vale la maggiorazione $-c\mu^2 < \mathcal{J}_j(t) - I_j(t) < c\mu^2$ per c una costante opportuna.

Tale «principio» non può essere accettato senza dimostrazione, anche perché è chiaro che il ragionamento su cui sembra basarsi è circolare: se le variabili azione non cambiano troppo al trascorrere del tempo, mentre le variabili angolo girano rapidamente, allora mediare sui tori è molto simile a mediare rispetto al tempo, e perciò a meno di termini periodici le variabili azione I_j sono costanti come le $\mathcal{J}_j$, e quindi le I_j variano di poco. In effetti tale «principio» non è affatto un teorema, anzi si conoscono dei controesempi, anche se «in molti casi» il principio funziona. Per rendersi conto del perché un simile «principio» fosse accettato come metodo per decidere sulla stabilità dei problemi di meccanica (specialmente celeste) occorre fare uso della tecnica degli sviluppi in serie trigonometriche (o di Fourier, come oggi si chiamano; ma Lagrange ha lavorato molti decenni prima di Fourier con questi metodi. Per le serie di Fourier si veda in questa stessa *Enciclopedia* l'articolo «Calcolo», II, pp. 443-45).

Poiché la «funzione perturbatrice» R_1 è una funzione periodica degli angoli l_j, si può supporre che essa si decomponga come somma di armoniche pure, cioè di funzioni del tipo (si considera per semplicità di notazione il caso $m = 2$ di due soli angoli l_1, l_2)

$$(30)\qquad B_{hk}(\mathbf{L}) \exp(i(hl_1 + kl_2))$$

con h,k numeri interi, e dove $e^{i\vartheta}=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$ è la formula di Eulero, usata qui semplicemente come notazione sintetica per le funzioni trigonometriche seno e coseno (cfr. in questa stessa *Enciclopedia* l'articolo «Funzioni», VI, § 7). Purché R sia una funzione periodica abbastanza regolare, essa sarà sempre esprimibile non come somma finita, ma come serie, definita dal passaggio al limite su di una somma infinita di termini come (30):

$$R_1(l_1,l_2,L_1,L_2)=\sum_{h,k} B_{hk}(L_1,L_2)\exp(i(hl_1+kl_2)) \tag{31}$$

dove la somma è estesa a tutte le coppie di interi relativi h e k. Allora una delle equazioni (28) si può scrivere derivando termine a termine (come si farebbe, per la linearità dell'operazione di derivazione, per una somma finita) la serie (31); e dalla regola elementare di derivazione $de^{it}/dt=ie^{it}$ si trova per esempio per L_1:

$$\frac{dL_1}{dt}=-\sum_{(h,k)\neq(0,0)} B_{hk}(L_1,L_2)ih\exp(i(hl_1+kl_2))+o(\mu) \tag{32}$$

dove la somma è estesa alle coppie (h,k) diverse dalla coppia $(0,0)$ e $o(\mu)$ include tutti i termini che contengono potenze di μ maggiori di 1 (e perciò «piccoli»).

Ora, se si sostituiscono nel secondo membro della (31) al posto di l_1, l_2, L_1, L_2 le soluzioni costanti o lineari del problema non perturbato (26), si «trascura» un altro termine del tipo $o(\mu)$, come si può vedere usando il teorema della derivata della funzione composta. Ma allora il secondo membro risulta somma di termini del tipo hiB_{hk} (costanti) per termini trigonometrici puri del tipo $\exp(i(hl_1+kl_2)t)$. Perciò la serie a secondo membro della (32) è una serie di funzioni trigonometriche del tempo (a meno di $o(\mu)$) e quindi L_1 si può ottenere integrando termine a termine (a meno di $o(\mu)$) con la formula inversa della precedente, cioè $\int e^{it}\,dt=(1/i)e^{it}+\text{cost}$;

$$\begin{aligned} L_1(t)=L_1(0)-\sum_{(h,k)\neq(0,0)} B_{hk}(L_1(0),L_2(0))\frac{h}{h\omega_1+k\omega_2} \\ \exp(i(h\omega_1+k\omega_2)t)+o(\mu). \end{aligned} \tag{33}$$

Nella (33) sta scritto appunto il principio della media, perché L_1 è espressa come un termine mediato – costante, come si è visto – piú termini periodici, piú termini dell'ordine di μ^2. Non ci sono termini secolari, cioè della forma $at+bt^2+\ldots$ che risulterebbero dall'integrazione di termini non trigonometrici $a+2bt+\ldots$; infatti il termine con $h=k=0$, che conterrebbe una funzione del tempo $e^{i0t}=1$ (costante), è assente; perciò per ogni arco di tempo L_1 è limitato (a meno di $o(\mu)$).

Questo risultato, chiamato da Lagrange nel 1776 teorema di stabilità del sistema solare, sembrò a suo tempo la soluzione finale al problema della stabilità nei problemi del tipo «n corpi». Non solo, ma le soluzioni del tipo (33), oltre ad essere stabili nel senso di non tendere all'infinito, sono anche adatte alla predizione di orbite di corpi celesti reali, e perciò «stabili» nel senso piú

generale discusso nel paragrafo 1. Infatti espressioni come la (33) sono composte di termini che sono esplicitamente calcolabili, pur di svolgere esplicitamente il procedimento di analisi armonica della funzione perturbatrice R_1, cioè pur di calcolare esplicitamente, magari a loro volta mediante sviluppi in serie, i coefficienti $B_{hk}(L_1,L_2)$. Perciò le soluzioni perturbate (a meno di $o(\mu)$) sono esplicitamente calcolabili con approssimazione arbitrariamente piccola, pur di avere la pazienza di calcolare abbastanza termini fino a trascurarne solo di molto piccoli [per un'esposizione moderna di questo metodo, cfr. Brouwer e Clemence 1961].

Vale la pena di osservare che tale procedimento è esattamente lo stesso (salvo la notazione, «analitica» anziché «geometrica») che veniva chiamato degli epicicli nell'astronomia anteriore a Keplero e Newton (cfr. del resto in questa stessa *Enciclopedia* gli articoli «Modello», IX, pp. 405 sgg. e «Astronomia»), visto che ogni termine (30) rappresenta una circonferenza percorsa con velocità uniforme, e l'orbita viene rappresentata mediante un numero finito di tali termini. Naturalmente i matematici del XIX secolo erano ben consci che troncare una serie a un numero finito di termini rappresenta un'approssimazione, mentre ciò non era probabilmente chiaro ad astronomi piú antichi; va notato però che anche gli astronomi degli epicicli si riservavano di usare qualsiasi numero di epicicli, e in pratica usavano un numero di termini non indifferente (parecchie decine).

Nello sviluppo della ricerca astronomica e meccanica, nell'epoca d'oro della meccanica celeste classica, questo procedimento di approssimazione per serie trigonometriche delle soluzioni fu usato con tenacia e ingegnosità sconosciuti ai frettolosi ricercatori d'oggi; senza peraltro fare uso di principî fondamentalmente diversi da quelli qui esposti. Per dare un'idea della mole del lavoro, è probabile che il record sia tuttora detenuto da Clemence, la cui teoria dell'orbita di Marte contiene oltre mille termini trigonometrici. La concordanza con le osservazioni astronomiche, per tutti i pianeti del sistema solare, delle predizioni basate su questi calcoli, fu talmente buona che soltanto piccolissimi «residui», cioè differenze, di pochi secondi d'arco (un secondo d'arco, per intendersi, è l'angolo sotteso dal diametro di una moneta da 50 lire a 5 chilometri di distanza) restavano da spiegare alla fine del XIX secolo, e soltanto pochi fra questi, tra cui il piú grosso era un residuo di 8 secondi d'arco per Mercurio, superavano il valore medio degli errori osservativi [cfr. Tisserand 1889-96]. Fu proprio l'aver spiegato questo termine la prima conferma della relatività generale. Val la pena di osservare, a questo proposito, che ancora oggi le effemeridi dei pianeti producono, rispetto alle osservazioni, «residui» sistematici di circa 1 secondo d'arco (il cosiddetto «effetto di opposizione»), malgrado il progresso delle tecniche osservative e spaziali e dei metodi di calcolo basati sull'uso di grandi calcolatori.

Se vale la pena di soffermarsi su questa storia della meccanica celeste classica non è solo perché questi metodi sono ancora attuali, visto che sono stati solo in parte sostituiti, e in tempi recenti, da una nuova generazione di metodi numerici basata sulla disponibilità di mezzi di calcolo automatico milioni di

volte piú veloci (cfr. del resto in questa stessa *Enciclopedia* la parte conclusiva dell'articolo «Calcolo»).

Ciò che piú interessa è che questa parte della storia della matematica e della fisica rappresenta un caso particolarmente paradossale dal punto di vista del problema della stabilità. Infatti il procedimento perturbativo basato sugli sviluppi in serie trigonometriche che è stato sommariamente descritto, è matematicamente del tutto illegittimo, e la sua conclusione è logicamente falsa.

Se ne può vedere il perché tornando per un momento con occhio piú critico sulle formule (32) e (33): è vero che derivazione e integrazione sono operazioni lineari, cioè possono essere eseguite termine a termine se applicate alla somma di due o piú funzioni; ma non è affatto vero che la stessa cosa vale per un numero infinito di termini, cioè per una serie. Cosí se si suppone che la formula (31) abbia senso, cioè che la serie che esprime R_1 converga (il che è sempre assicurato purché la funzione perturbatrice R_1 sia abbastanza regolare), ciò non significa affatto che la serie a secondo membro della (33) converga, vista la presenza del fattore $h/(h\omega_1+k\omega_2)$ che può diventare arbitrariamente grande: ora un teorema di calcolo differenziale (che naturalmente non era noto ai tempi di Lagrange) dice che la derivazione e l'integrazione di una serie termine a termine sono possibili a condizione appunto che tutte le serie in questione convergano (uniformemente). Perciò, se la serie a secondo membro della (33) diverge o ha comportamento irregolare, il secondo membro non ha senso e il primo membro $L_1(t)$ non ha niente a che fare con lo sviluppo in serie che la (33) sembra assegnargli; in particolare può darsi benissimo che la vera soluzione $L_1(t)$ contenga dei termini secolari $at+bt^2+\ldots$ ed eventualmente non sia neppure limitata.

Per vedere quale sia veramente l'ostacolo, si esamini il «denominatore» $h\omega_1(\mathbf{L})+k\omega_2(\mathbf{L})$: i termini che rischiano di far divergere la serie sono quelli in cui il «denominatore» è piccolo.

Ora il «denominatore» può essere addirittura zero per alcuni valori di h e k, se il rapporto tra $\omega_1(\mathbf{L})$ e $\omega_2(\mathbf{L})$ è razionale; e precisamente per quegli h, k tali che $\omega_1(\mathbf{L})/\omega_2(\mathbf{L})=-(k/h)$ e in tal caso il procedimento dello sviluppo in serie di Fourier non è legittimo, perché il termine $\exp(i(\omega_1 h+\omega_2 k)t)$ è costantemente uguale a 1 e il suo integrale è appunto t, cioè un «termine secolare». Per prima cosa cioè per assicurare un senso allo sviluppo (33) occorre che ω_1/ω_2 sia irrazionale per il caso considerato, per esempio per un certo pianeta.

Si nota subito che affermare che una grandezza di un modello matematico della realtà fisica, che dovrebbe svolgere il ruolo di osservabile (come si è visto nel paragrafo 2 i periodi, e quindi le frequenze, sono facili da osservare), deve essere irrazionale per l'applicabilità del modello stesso è, dal punto di vista della stabilità, un vero suicidio scientifico. Infatti i numeri razionali e quelli irrazionali sono due sottoinsiemi dei numeri reali densi l'uno nell'altro, il che significa esattamente che per quanto piccolo sia l'errore di misura nelle osservabili ω_1 e ω_2, è impossibile decidere sulla base di tale misura se ω_1/ω_2 è razionale o irrazionale. Inoltre non è affatto vero che purché ω_1/ω_2 sia irrazionale la (33) è dotata di senso: se ω_1/ω_2 non è mai pari al quoziente di due interi, è però

possibile scegliere gli interi h, k in modo che la frazione $-h/k$ approssimi ω_1/ω_2 molto bene (per esempio con il procedimento detto dello sviluppo in frazioni continue), e quindi il «denominatore» $h\omega_1+k\omega_2$ sia molto piccolo. Se tali «piccoli denominatori» sono presenti, la serie (33) sarà pure divergente; e quel che è peggio, anche tale presenza di «piccoli denominatori» dipende da proprietà del numero irrazionale ω_1/ω_2 che non sono discriminabili da alcuna misura con precisione finita [cfr. Wintner 1941]. La conclusione di questo ragionamento sembra una vera disfatta della ragione e della scienza moderna, tanto piú grave quanto piú grande era stato il successo pratico della meccanica celeste nelle predizioni astronomiche e quanto piú importante era stata proprio questa teoria nell'affermarsi di filosofie meccaniciste o positiviste: poiché un metodo illogico fornisce predizioni praticamente utili, mentre un esame rigoroso del problema degli n corpi non fornisce alcuna indicazione pratica. Non solo: ma il problema del rapporto razionale delle frequenze sembra risiedere nel problema imperturbato, a $\mu=0$, cioè nella hamiltoniana $K_0(L)$, e non nella perturbazione: per esempio nel problema dei due corpi; o per lo meno è la soluzione di «ordine 0 in μ», cioè del problema imperturbato, da cui si parte, che determina quali sono gli indici critici h, k e quindi i termini critici B_{hk} della funzione perturbatrice R_1 che producono effetti secolari o almeno amplificati. Fortunatamente fenomeni di questo genere sono ben noti in matematica e in fisica, sotto il nome di risonanze. Poiché questo termine è usato talvolta in modo un po' miracolistico per «aggiustare» i casi in cui le teorie ordinarie falliscono (cioè sono instabili logicamente, diventano inconsistenti per effetto di una piccola perturbazione), occorre soffermarsi con qualche attenzione su questo termine.

5. *Risonanze e orbite periodiche.*

Per comprendere il senso della parola 'risonanza' si ritorni al caso di un sistema integrabile nel senso del teorema di Arnol'd-Jost; per esempio nel caso di due «gradi di libertà», un sistema in quattro variabili l_1, l_2, L_1, L_2 in cui L_1 e L_2 siano integrali primi, cioè la hamiltoniana sia funzione solo di L_1, L_2: $H=H_0(L_1, L_2)$. Allora le variabili angolo variano linearmente col tempo su di un toro fisso:

$$\begin{cases} \dfrac{dl_1}{dt}=\dfrac{\partial H_0}{\partial L_1}(\mathbf{L}) & \dfrac{dl_2}{dt}=\dfrac{\partial H_0}{\partial L_2}(\mathbf{L}) \\ \dfrac{dL_1}{dt}=0 & \dfrac{dL_2}{dt}=0 \end{cases} \tag{34}$$

cioè:

$$\begin{aligned} l_1&=\omega_1(\mathbf{L})t+l_{10} \\ l_2&=\omega_2(\mathbf{L})t+l_{20} \end{aligned} \tag{35}$$

Ora si suppone che su di un toro fissato le due frequenze ω_1 ed ω_2 siano «risonanti» cioè in rapporto razionale tra loro

$$\frac{\omega_1(\mathbf{L})}{\omega_2(\mathbf{L})}=\frac{h}{k} \tag{36}$$

(h, k interi); si aspetta un tempo T tale che l_1 sia aumentata di h giri, cioè $\omega_1 T=h\cdot 2\pi$; nello stesso tempo T, per la (35) l_2 è aumentato di $\omega_2 T=k\cdot 2\pi$ cioè di k giri. Ma poiché l_1, l_2 sono variabili angolo, il punto sul toro descritto dai nuovi valori di l_1, l_2 è lo stesso descritto dai valori a $t=0$ cioè l_{10}, l_{20}. Poiché questo ragionamento non dipende affatto dai valori iniziali l_{10}, l_{20}, ne risulta che dopo un periodo T tutte le orbite sul toro ripassano dallo stesso punto da cui erano partite. Perciò tutte le orbite situate sul particolare toro soddisfacente la (36) sono periodiche con lo stesso periodo T, cioè ripassano dallo stesso punto a intervalli regolari, lunghi T. Si supponga ora di «perturbare» il problema integrabile, cioè di introdurre un parametro μ:

$$H=H_0+\mu R_1+\mu^2 R_2+\ldots \tag{37}$$

Cosa accadrà per $\mu\neq 0$, ma piccolo, delle orbite periodiche? Per rispondere a questa domanda occorre porsi per prima cosa un problema a monte: come si trovano le orbite periodiche? La parola 'trovare' ha in realtà un significato vago e ambiguo: in effetti si possono cercare dei teoremi che dimostrano l'esistenza, sotto certe condizioni, di orbite periodiche e le loro proprietà; si possono cercare le orbite periodiche conducendo «esperimenti numerici» con un calcolatore; si possono cercare nel cielo fenomeni periodici, o apparentemente tali, che facciano pensare alle risonanze. Nella ricerca in meccanica celeste tutti e tre questi procedimenti hanno un loro valore, e i loro risultati s'intrecciano in un modo inconsueto, se si considera quanto sono diversi gli strumenti (la pura logica, il calcolatore e il telescopio – o la sonda spaziale) che si utilzzano.

Si supponga allora di cercare le orbite periodiche di un sistema perturbato. L'idea fondamentale in questo campo risale a Poincaré [1892-99], ed è quella della «superficie di sezione»: si prenda un sistema come il (34); se nello spazio delle fasi (in questo caso a quattro dimensioni) si fissa il valore di una coordinata angolo, per esempio $l_1=0$, si definisce nello spazio delle fasi una ipersuperficie S (a tre dimensioni). Presa un'orbita che parte da un punto Q di S per $t=0$, dopo un certo tempo T la stessa orbita potrà ritornare a passare da un punto Q_1 di S; se la velocità iniziale nel punto Q non è tangente alla S e la velocità finale in Q_1 ha la stessa proprietà, allora l'applicazione Θ che associa a ogni punto Q di S il punto di «ritorno su S», Q_1, corrispondente, è regolare (quanto lo è l'equazione differenziale) e perciò si può calcolarne le derivate e applicare i teoremi della funzione implicita e simili (cfr. fig. 2; che però rappresenta il caso a tre dimensioni, in cui S è una superficie).

Nel caso che S sia definita dal valore costante di una variabile angolo, come nell'esempio considerato $l_1=0$, è chiaro che s'intenderà per ritorno su S anche il caso in cui l_1 diventa uguale a 2π (oppure -2π), perché a $l_1=0$ e $l_1=2\pi$ corrispondono gli stessi punti.

Tale applicazione Θ, se e dove è ben definita e regolare, prende il nome di applicazione di Poincaré $\Theta(Q)=Q_1$. Se ora P è un punto di S che sta su di un'orbita periodica, dovrà avere la proprietà che $\Theta(P)=P$, oppure $\Theta(\Theta(P))=$ $=\Theta^2(P)=P$, oppure $\Theta^3(P)=P$, ecc. perché prima o poi l'orbita deve ripassare da P e perciò attraversare S in P. Viceversa, se P è un punto periodico per Θ, cioè $\Theta^k(P)=P$ per qualche k intero $\neq 0$, allora per P passa un'orbita periodica, di periodo magari molto lungo se k è grande: infatti per ogni punto dello spazio delle fasi passa una e una sola soluzione delle equazioni, e perciò se la soluzione $P(t)$ ripassa da $P(0)$ dopo il tempo T, $P(0)=P(T)$, varrà pure per ogni t: $P(t)=P(t+T)$.

Perciò il problema di trovare un'orbita periodica è ridotto a quello di trovare un punto unito per l'applicazione di Poincaré, oppure di una sua iterata, cioè a risolvere l'equazione

$$\Theta(P)-P=O \tag{38}$$

o l'analoga con Θ^k al posto di Θ.

L'equazione (38) è un'equazione non-lineare vettoriale (sia l'incognita P sia il secondo membro stanno su S, varietà a tre dimensioni) e perciò è difficile che se ne possano calcolare esplicitamente le soluzioni, anche ammesso di conoscere esplicitamente l'applicazione di Poincaré. Si cerca allora di approssimare la soluzione mediante un procedimento di approssimazioni successive: per esempio se si prende come primo tentativo il punto P_0, risulterà $\Theta(P_0)\neq P_0$; allora come secondo tentativo si potrà provare con il punto

$$P_1=P_0-\left[\frac{d}{dP}(\Theta(P)-P)\bigg|_{P=P_0}\right]^{-1}(\Theta(P_0)-P_0). \tag{39}$$

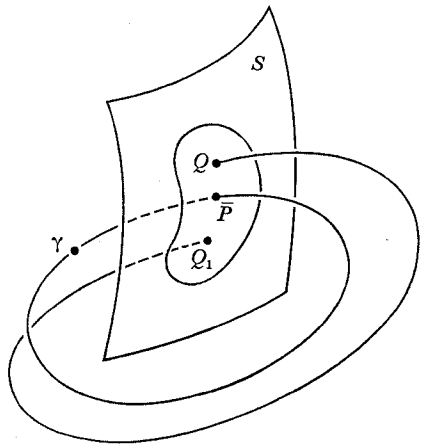


Figura 2.
Il metodo della sezione.

La formula (39) può sembrare complicata, e lo è perché lo spazio su cui si opera è una varietà a tre dimensioni; però si supponga per un attimo che la superficie di sezione abbia dimensione 1, cioè sia una curva: allora la (39) dice che l'incremento da dare a P_0 per l'iterazione successiva è l'opposto del quoziente tra il valore della funzione $\Theta(P)-P$, calcolata in P_0, e il valore della sua derivata, calcolata pure in P_0; cioè la (39) altro non è che la formula di Newton-Raphson (si veda in questa stessa *Enciclopedia* l'articolo «Calcolo», II, pp. 465-66), che in effetti converge (con esponente di convergenza 2, cioè molto velocemente) anche nel caso multidimensionale purché il punto P_0 sia abbastanza vicino a un punto periodico $\bar{P}$, purché Θ sia una funzione abbastanza regolare e soddisfi a condizioni di non-degenerazione che qui si omettono, e purché la (39) abbia senso per ogni iterazione. Nel caso unidimensionale la condizione perché la (39) abbia senso è che la derivata al denominatore sia effettivamente invertibile, quindi diversa da zero; nel caso multidimensionale la derivata $d(\Theta(P)-P)/dP$ è una matrice, e perciò la condizione di invertibilità è che essa abbia determinante diverso da 0 se calcolata in $\bar{P}$ (e perciò anche nei punti vicini, per continuità):

$$\det\frac{d}{dP}(\Theta(P)-P)|_{P=\bar{P}}=\det(A(\bar{P})-I)\neq 0, \tag{40}$$

dove A è la «matrice jacobiana» delle derivate parziali di Θ e I è la matrice identità (1 sulla diagonale, 0 altrove). Si noti che la (40) è in effetti una condizione sull'orbita periodica che si sta cercando, poiché A deve essere calcolato in $\bar{P}$, punto unito cercato: un'orbita periodica che soddisfi alla (40) si dice differenziabilmente isolata. Perciò, in linea di principio e sotto condizioni spesso verificate, ogni orbita periodica «differenziabilmente isolata» può essere «trovata» come limite di un procedimento iterativo di Newton-Raphson, cioè in pratica approssimata arbitrariamente bene con un numero adeguato di iterazioni del procedimento (39).

Si noti che la formula di Newton-Raphson (39) non richiede affatto di conoscere $\Theta(P)$ per ogni P, ma solo per i punti successivamente incontrati nell'iterazione, $P_0, P_1, P_2, \ldots$; assieme però alla matrice jacobiana calcolata negli stessi punti: $A(P_0), A(P_1), A(P_2), \ldots$ Questo è molto importante nel caso di un sistema perturbato (cioè con la hamiltoniana (37), con $\mu\neq 0$): infatti in tal caso non è affatto detto che sia possibile conoscere $\Theta(P)$ in funzione di P con una formula esplicita; però sarà sempre possibile calcolare un valore approssimato di $\Theta(P_0)$ per un singolo punto P_0, per esempio usando un procedimento di calcolo numerico d'integrazione delle equazioni differenziali di Hamilton con punto iniziale P_0, e poi interpolando il valore $\Theta(P_0)$ al passaggio attraverso S.

Non solo: ma integrando delle altre opportune equazioni differenziali, dette «equazioni alle variazioni», si possono calcolare numericamente anche i valori delle derivate parziali delle soluzioni delle equazioni differenziali di Hamilton rispetto alle condizioni iniziali, e perciò anche le derivate contenute in $A(P_0)$. Perciò il procedimento (39) è realizzabile in pratica, in modo approssimativo, per qualsiasi sistema di equazioni differenziali, per quanto complicata sia

la perturbazione, pur di usare un algoritmo di soluzione delle equazioni stesse, facilmente implementabile su di un calcolatore (anche piccolo). Questo spiega a sufficienza perché sulle orbite periodiche è possibile effettuare esperimenti numerici col calcolatore; non spiega però a cosa serve, se cioè questi esperimenti dimostrano qualche cosa. Infatti, per quanto ingegnose siano le tecniche di calcolo numerico usate per ottenere soluzioni che approssimano da vicino la soluzione esatta, non è mai possibile dimostrare con calcoli numerici che due numeri reali sono uguali, se non altro perché ogni calcolatore tratta numeri con un numero finito di decimali (commettendo cosí un errore di arrotondamento) e perché i procedimenti di discretizzazione impiegati per tradurre le equazioni differenziali in equazioni alle differenze finite producono a loro volta errori «di troncamento» (cfr. in questa stessa *Enciclopedia* l'articolo «Calcolo», II, § 4).

Poiché gli errori numerici si accumulano con il procedere dell'integrazione numerica, per quanto precisa sia l'approssimazione della soluzione trovata per un intervallo finito di tempo, l'errore che si commette su di un intervallo illimitato di tempo è sempre illimitato (almeno per sistemi hamiltoniani). Perciò, anche ammettendo che si trovi quella che, con tutta la precisione possibile praticamente in un esperimento numerico, appare un'orbita periodica (cioè $\Theta(\bar{P})$ coincide con $\bar{P}$ fino a una certa cifra decimale), ciò non dimostra affatto che $\Theta^k(\bar{P})-\bar{P}$ non cresca con k, magari diventando arbitrariamente grande.

La situazione però cambia radicalmente se si può dimostrare per una via del tutto indipendente dall'esperimento numerico che vicino all'«orbita periodica numerica» $\bar{P}$ si trova un'orbita periodica vera $\tilde{P}$. In tal caso la conoscenza dell'approssimazione dell'orbita di $\bar{P}$ calcolata con un procedimento numerico fornisce informazioni non solo su di un tratto finito dell'orbita stessa, ma su tutta l'orbita per t qualunque: perché se l'orbita è periodica di periodo T, basta conoscerne (magari con una certa approssimazione) il tratto per t compreso tra 0 e T per conoscere (con la stessa approssimazione) tutta l'orbita per ogni t, che non fa altro che ripetere infinite volte lo stesso percorso.

Ora il fatto essenziale è che la condizione (40), che definisce un'orbita periodica differenziabilmente isolata, garantisce anche che se un'orbita periodica esiste per un dato sistema (per esempio quello integrabile, con parametro perturbativo $\mu=0$) allora esiste per sistemi «vicini» (nel caso considerato, definito dalla hamiltoniana perturbata (37), per μ abbastanza piccolo) [cfr. Siegel e Moser 1971]. Questo deriva semplicemente dall'applicazione del teorema della funzione implicita all'equazione (38): naturalmente occorre la versione multidimensionale del teorema della funzione implicita.

Perciò nel caso di orbite periodiche differenziabilmente isolate del problema imperturbato ($\mu=0$) la persistenza di orbite periodiche anche nel problema perturbato ($\mu\neq 0$) non è in dubbio. Nel caso del problema integrabile (34) le orbite periodiche però non sono isolate, ma addirittura formano interi tori, come si è visto; tuttavia è possibile ridursi a considerare come isolate le orbite periodiche che soddisfano a particolari condizioni di simmetria. Per esempio, nel caso del problema dei tre corpi, si possono considerare solo le orbite che soddisfano a questa condizione: quando i tre corpi P_1, P_2, P_3 sono allineati, le

velocità di tutti e tre sono perpendicolari alla linea dei tre corpi. Allora le orbite periodiche soddisfacenti a questa condizione sono differenziabilmente isolate per $\mu=0$, e quindi esistono anche per $\mu\neq 0$ [cfr. Szebehely 1967].

Di conseguenza per $\mu\neq 0$ i tori costituiti da orbite periodiche del problema imperturbato si sfasciano, lasciando posto a un numero finito di orbite periodiche isolate.

Ora un piccolo intorno di queste orbite periodiche isolate può essere studiato con il classico procedimento della linearizzazione: in pratica se $\Theta^k(\bar{P})=\bar{P}$, per un punto vicino a $\bar{P}$, P, si ha $\Theta^k(P)=\bar{P}+A^k(P)(P-\bar{P})+o(P-\bar{P})$, dove $A(\bar{P})$ è la matrice jacobiana delle derivate parziali dell'applicazione di Poincaré, che rappresenta la linearizzazione dell'applicazione stessa in $\bar{P}$, cioè il suo differenziale, e il simbolo o rappresenta come al solito i termini del secondo ordine nella differenza $P-\bar{P}$. Poiché è relativamente facile studiare il comportamento di un'applicazione lineare, si tratta in sostanza di decidere se la presenza del termine $o(P-\bar{P})$ cambia il carattere di stabilità orbitale (nel senso di Lagrange, definito al paragrafo 2) dell'orbita periodica $\bar{P}$. Il risultato piú netto in questo campo è dovuto a Ljapunov, il quale provò che, nel caso di un sistema hamiltoniano, se l'orbita per $\bar{P}$ è instabile anche nell'approssimazione lineare, allora è instabile anche nel sistema completo.

In tal caso perciò esistono orbite che si allontanano da $\bar{P}$, e anche orbite che si avvicinano a $\bar{P}$ indefinitamente, formando una «varietà stabile» e una «varietà instabile».

Ora la difficoltà consiste nel decidere che cosa accade delle orbite della varietà instabile per $t\to+\infty$. Il fatto che esse si allontanino sulle prime da $\bar{P}$ non significa che si allontanino fino all'infinito; perché può capitare che la varietà stabile incroci la varietà instabile, cioè che una stessa orbita si allontani da $\bar{P}$

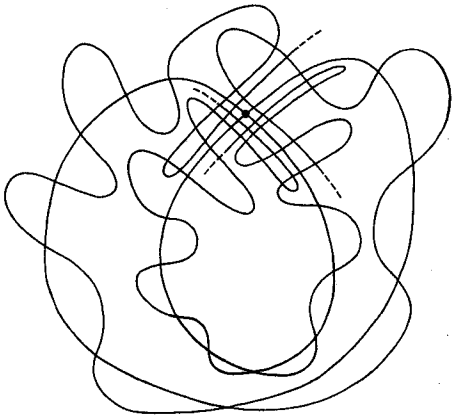


Figura 3.

Punti omoclinici, cioè intersezioni di una varietà stabile con quella instabile relativa allo stesso punto fisso sulla sezione.

per poi tornare ad avvicinarsi indefinitamente alla stessa $\bar{P}$ (orbite «omocliniche» nella terminologia di Poincaré). Perciò le due curve che sulla superficie di sezione individuano le due varietà, stabile e instabile, devono intersecarsi infinite volte. Lasciando la parola a Poincaré stesso, «tali intersezioni formano una sorta di treccia, di tessuto, di rete con maglie infinitamente strette; ognuna delle due curve non deve mai tagliarsi, ma deve ripiegarsi su se stessa in modo molto complesso per incontrare una infinità di volte tutte le maglie della rete. Si resterebbe allibiti dalla complessità di tale figura, che non cerco neanche di tracciare» [1892-99, III, p. 389].

Nella figura 3, violando il consiglio di Poincaré, si è cercato di dare un'idea della complicazione della situazione in presenza di orbite omocliniche. In questo caso si assiste al massimo possibile di instabilità: non solo l'orbita per $\bar{P}$ è orbitalmente instabile, e cosí tutte le orbite nelle due varietà, stabile e instabile; ma neppure tale instabilità è una predizione stabile. Infatti la rete di cui parla Poincaré è infinitamente fitta, eppure non riempie alcun aperto sulla sezione; niente impedisce che per alcuni punti arbitrariamente vicini alla varietà instabile passino orbite periodiche, magari stabili. Anzi, a questo proposito vale la pena di citare la congettura (sempre di Poincaré) che le orbite periodiche siano dense in tutto lo spazio delle fasi.

Purtroppo anche nel caso, del resto frequentemente verificato, che nella regione di instabilità «generata» da un'orbita omoclinica (cioè in realtà causata da una risonanza, con la sua capacità di accumulare nel tempo piccole forze producendo grandi effetti) si trovi un'orbita periodica con applicazione di Poincaré linearizzata stabile, non è cosí facile concludere come nel caso instabile che l'applicazione di Poincaré completa ha lo stesso comportamento. Perciò la regione instabile, percorsa da punti omoclinici, può o meno contenere delle «isole» di stabilità attorno alle orbite periodiche linearmente stabili.

Come è chiaro da questa descrizione, sia pure sommaria, le regioni di risonanza corrispondono a famiglie di orbite la cui complessità di comportamento è reale; le difficoltà logiche prodotte dalle risonanze, come per esempio la divergenza delle serie perturbative (33), non sono un difetto della teoria ma il riflesso nella teoria dei sistemi hamiltoniani di enormi complicazioni insite nel comportamento delle soluzioni e inerenti alla natura del problema, non solo dal punto di vista matematico, ma anche dal punto di vista fisico.

Dalla percezione di queste difficoltà, e non solo dalla mania di usare il calcolatore ad ogni costo, nacque la moda degli «esperimenti numerici» su equazioni di Hamilton.

6. *La teoria di Kolmogorov-Arnol'd-Moser.*

Allora si immagini di compiere un esperimento col calcolatore su di un sistema perturbato a due gradi di libertà: si prenda su di una sezione S un certo numero di punti P e si seguano le successive immagini dell'applicazione di Poincaré $\Theta^k(P)$. Si può rappresentare la situazione in due dimensioni, anche

se S ha dimensione 3, perché si può «eliminare» una variabile, cioè ricavarla dalla relazione che lega tra loro le variabili fornite da un integrale primo; per esempio la funzione di Hamilton è un integrale primo se non dipende direttamente dal tempo: si può usare una rappresentazione in coordinate polari, in cui per esempio l_2 è l'angolo e L_2 il raggio, supponendo che L_1 sia «eliminato». Per $\mu = 0$ non occorre il calcolatore, naturalmente, perché l'immagine di un punto P si ottiene ruotando P di un angolo $2\pi\,\omega_2/\omega_1$, dove ω_1, ω_2 sono le frequenze sul toro invariante su cui sta P: perciò se ω_2/ω_1 è razionale $\Theta^k(P)$ al variare di k passa solo per un numero finito di punti, se ω_1/ω_2 è irrazionale $\Theta^k(P)$ al variare di k «riempie» una circonferenza $L_2 = \text{cost}$ (cioè i punti ottenuti per iterazione successiva di Θ sono tutti distinti e formano un insieme denso nella circonferenza) (cfr. fig. 4).

Se invece μ è piccolo ma diverso da zero, l'esperimento col calcolatore dà un risultato che dipende dal punto iniziale scelto P in modo molto complicato.

In alcuni casi i punti $\Theta^k(P)$ sembrano individuare una curva, come a $\mu = 0$, poco diversa da una circonferenza $L_2 = \text{cost}$. In altri casi i punti $\Theta^k(P)$, al crescere di k, sembrano per un po' girare lungo quella che potrebbe anche essere una curva, ma poi – di solito all'improvviso – la «curva» comincia a oscillare e si «disfa» sotto gli occhi dello sperimentatore, mentre i punti $\Theta^k(P)$ si muovono in modo molto irregolare entro un'intera regione del piano. Osservare l'orbita $\Theta^k(P)$ mentre viene calcolata su di un terminale video è veramente stupefacente se non si è preparati da una robusta base teorica ad accettare le stranezze dei sistemi hamiltoniani.

All'interno delle regioni «caotiche», in cui le orbite non sembrano giacere su curve invarianti, non vi è però un disordine uniforme, come per esempio un comportamento «ergodico», cioè un moto irregolare che però segue leggi statistiche semplici come quella che la probabilità di passare da ogni area unita-

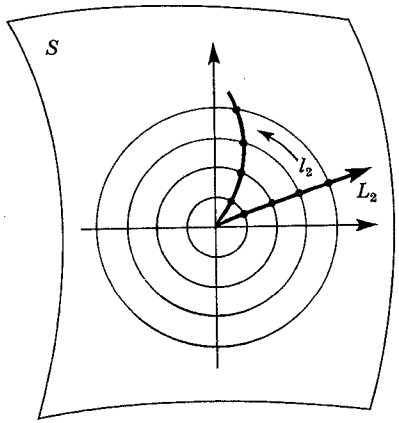


Figura 4.
Tracce dei tori invarianti a $\mu = 0$ su di una sezione.

ria è la stessa. Infatti proprio nelle regioni caotiche, con il procedimento delle equazioni (38) e (39), si possono trovare delle orbite periodiche differenziabilmente isolate, che sono facilmente identificabili con quelle la cui esistenza è dimostrabile per «continuazione» per μ piccolo.

Non solo: ma alcune di queste orbite periodiche sono a loro volta circondate da «isole», cioè da regioni «ordinate» in cui i punti successivi $\Theta^k(P)$ si dispongono su «curve» invarianti, o per lo meno su corone circolari cosí strette da non consentire di decidere se il loro spessore sia reale o prodotto dall'accumulazione dell'errore numerico.

Questo esperimento, che è stato presentato in forma ipotetica, è in effetti un tipo di esperimento realmente condotto da molti ricercatori partiti da problemi apparentemente diversi – dal moto delle particelle elementari in un acceleratore del tipo ad anello, al moto delle stelle nella Galassia, alla dinamica del sistema solare – con grande interesse e polemiche, abbastanza inconsuete nel mondo scientifico, su cosa veramente venisse provato dai risultati ottenuti. Le regioni «ordinate», apparentemente composte da curve invarianti, erano realmente regioni in cui un nuovo integrale primo definiva superfici di livello su cui le orbite devono giacere? Tale congettura, apparentemente suggerita dagli esperimenti numerici, contrastava con i risultati di Poincaré e di Bruns sull'inesistenza di integrali primi oltre a quelli già noti. Anche non ammettendo l'esistenza di nuovi integrali primi, è però vero che nelle regioni ordinate esistono delle curve invarianti per Θ, le quali separano lo spazio delle fasi in regioni sconnesse tra loro, e quindi assicurano un comportamento stabile delle orbite, almeno nel senso che la regione in cui si muovono è ben delimitata?

Malgrado alcune polemiche negli ambienti specialistici, l'evidenza contro l'esistenza di nuovi integrali primi era piú che sufficiente sin dai tempi di Poincaré, e la ragione è proprio la «biforcazione delle separatrici» descritta nel paragrafo precedente: infatti tali fenomeni sono certamente impossibili in presenza di un ulteriore integrale primo. Bisogna però riconoscere che un enunciato netto del tipo «questo sistema hamiltoniano con $\mu = \text{tot}$ non ha altri integrali primi differenziabili» non è mai stato dimostrato.

Il teorema di Poincaré, e in maniera piú netta il teorema dimostrato in seguito da Siegel, dicono una cosa meno precisa, che per alcuni è soddisfacente e per altri meno: cioè che nello spazio totale dei sistemi hamiltoniani (cioè nello spazio delle funzioni H) quelli che sono dotati di integrali primi indipendenti da H formano un insieme «magro» in qualsiasi ragionevole topologia. Ciò significa che, dato un sistema dotato di un integrale primo funzionalmente indipendente dalla hamiltoniana, è sempre possibile «perturbarlo», rendendolo privo di integrali di tale tipo, con una perturbazione arbitrariamente «piccola», e questo risultato non dipende da quale delle molte definizioni di piccolezza delle perturbazioni si usa. Il senso intuitivo di questa affermazione è che la probabilità che un «generico» sistema hamiltoniano abbia un altro integrale primo è zero, ma purtroppo questa affermazione non si può rendere rigorosa senza definire in modo preciso che cosa significa «generico». La formalizzazione del concetto di generico in effetti è possibile, ricalcando i metodi della geometria alge-

brica con una tecnica introdotta da Thom (si veda in particolare in questa stessa *Enciclopedia* l'articolo «Locale/globale», VIII, pp. 460 sgg.), però tale formalizzazione fa appunto perdere il carattere intuitivo del discorso che si andava facendo. Forse l'unica interpretazione intuitiva dei teoremi di non-integrabilità è quella «fisica»: l'esistenza di un integrale primo distinto dalla hamiltoniana è instabile rispetto alle perturbazioni, perciò se anche fosse presente in un dato sistema hamiltoniano non sarebbe espressiva di una realtà che certamente è modellata solo in modo semplificato dalle equazioni usate.

Per queste ragioni l'indirizzo di ricerca piú fecondo si rivelò il secondo citato, cioè quello di tentare di dimostrare che le superfici invarianti che apparivano tali negli esperimenti numerici erano reali.

In linea di principio la tecnica, che fu sviluppata da Birkhoff [1927], è la stessa usata per integrare i sistemi integrabili mediante una soluzione S dell'equazione di Hamilton-Jacobi (19). Se però la hamiltoniana H è complicata, non c'è alcuna speranza d'integrare esplicitamente, per «separazione di variabili» o altrimenti, l'equazione a derivate parziali (19); resta solo la possibilità di trovare una soluzione mediante sviluppi in serie. Le serie impiegate sono generalmente del tipo detto di Linstedt, cioè serie doppie, di Taylor nel parametro perturbativo μ, e di Fourier nelle variabili angolo. Si è già visto uno sviluppo di questo genere nel paragrafo 4 con le formule (27) e (31): H viene sviluppata in serie, con per termine iniziale la hamiltoniana di un sistema integrabile e termini successivi sempre piú piccoli (per μ piccolo):

$$H(\mathbf{l},\mathbf{L})=H_0(\mathbf{L})+\mu R_1(\mathbf{l},\mathbf{L})+o(\mu) \tag{41}$$

mentre la funzione perturbatrice R_1 è sviluppata in serie di Fourier, cosí come i termini successivi:

$$R_1(\mathbf{l},\mathbf{L})=\sum_{h\neq 0} B_h(\mathbf{L})\exp(i\mathbf{h}\cdot\mathbf{l}). \tag{42}$$

Nella (42) si è generalizzato la (31) al caso di anche piú di due variabili angolo $\mathbf{l}$, usando un «multi-indice» $\mathbf{h}$, cioè un vettore a componenti intere $\mathbf{h}=(h_1, \ldots, h_n)$, ma il lettore non si faccia distrarre da questi trucchi del mestiere del matematico e pensi semplicemente a funzioni trigonometriche dipendenti da una combinazione di variabili angolo. Allora una trasformazione canonica che riduce H alla forma dipendente solo da nuove variabili azione $\mathbf{L}'$ è definita da una funzione generatrice $S(\mathbf{l},\mathbf{L}')$ che soddisfa all'equazione di Hamilton-Jacobi

$$H\left(\mathbf{l},\frac{\partial S}{\partial \mathbf{l}}(\mathbf{l},\mathbf{L}')\right)=K(\mathbf{L}'). \tag{43}$$

Se ora si suppone di sviluppare la funzione generatrice incognita S a sua volta in una serie di Linstedt, si ottiene con le solite notazioni

$$\begin{aligned} S(\mathbf{l},\mathbf{L}')&=\sum_j l_jL'_j+\mu S_1(\mathbf{l},\mathbf{L}')+o(\mu)\\ S_1(\mathbf{l},\mathbf{L}')&=\sum_h C_h(\mathbf{L}')\exp(i\mathbf{h}\cdot\mathbf{l}). \end{aligned} \tag{44}$$

Adesso sostituendo gli sviluppi in serie (41), (42), (44) nella (43) ed eseguendo un po' di conti, si ottiene:

$$H_0(\mathbf{L}')+\mu\left[R_1(\mathbf{l},\mathbf{L}')+\sum_i \frac{\partial H_0}{\partial L_i}\frac{\partial S}{\partial l_i}\right]+o(\mu)=K(\mathbf{L}'); \tag{45}$$

perciò, per eliminare la dipendenza da μ nel primo membro a meno di termini contenenti μ^2 (e perciò «piú piccoli»), basta annullare la parte tra parentesi; se si nota che $(\partial H_0/\partial L_i)=\omega_i$ sono le frequenze del sistema imperturbato, si trova un'equazione che lega S_1 a R_1, e conduce su ogni termine delle rispettive serie di Fourier alla condizione

$$B_h+i\sum_j \omega_j h_j C_h=0 \tag{46}$$

da cui segue la soluzione «formale» espressa in serie di Fourier per S_1:

$$S_1(\mathbf{l},\mathbf{L}')=\sum_{h\neq 0}\frac{iB_h(\mathbf{L}')}{\sum_j \omega_j h_j}\exp(i\mathbf{h}\cdot\mathbf{l}). \tag{47}$$

Con la (47) si è arrivati allo stesso punto a cui si era arrivati con la (33) nel paragrafo 4; cioè a una serie che può benissimo divergere per la presenza del «piccolo denominatore» $\sum_j \omega_j h_j$, anzi è priva di senso alla risonanza, cioè quando il piccolo denominatore è zero. Perciò la serie (47) sarà certamente divergente per certi valori di $\mathbf{L}'$ per i quali gli $\omega_i=(\partial H_0/\partial L_i)(\mathbf{L}')$ assumono valori con rapporti molto ben approssimabili con i razionali, e poiché tali numeri sono densi nei reali questo rende del tutto impossibile la convergenza delle serie (47) su di una regione aperta dello spazio delle fasi. Però se ci si limita a richiedere che la convergenza si verifichi su di un particolare toro del sistema integrabile, cioè per valori di $\mathbf{L}'$ – e quindi delle frequenze ω_i – fissati, e per $\mathbf{l}$ qualunque, allora si può scegliere $\mathbf{L}'$ in modo che gli ω_i siano non solo tali da non annullare il piccolo denominatore (nel caso a due soli angoli, ω_1/ω_2 irrazionale), ma anche tali da non renderlo troppo piccolo per valori bassi degli indici h_i e quindi da far convergere le serie.

Il procedimento dimostrativo è in effetti molto complicato, ed è basato su di una sorta di generalizzazione del metodo di Newton applicato a spazi funzionali [cfr. Moser 1973]. Ci si limita a citare il risultato, nella forma piú semplice, annunziata da Kolmogorov nel 1954 e in seguito provato ed ampliato da Arnol'd e da Moser: se le frequenze ω_i sono tali che per ogni multi-indice $\mathbf{h}\neq 0$

$$\left|\sum_j \omega_j h_j\right|>\frac{c}{\sum_j |h_j|^d} \tag{48}$$

per qualche fissato c, d maggiore di zero, e inoltre la hamiltoniana imperturbata H_0 è regolare e non degenere nel senso che la matrice $\partial^2 H_0/\partial L_i\,\partial L_j$ è a determinante diverso da zero, allora la serie (47) converge, per μ abbastanza

piccolo e cosí le analoghe relative alle potenze piú alte di μ. Perciò esiste una funzione $S = S(\mathbf{l}, \mathbf{L}')$, solo per il valore dato di $\mathbf{L}'$, e la legge di trasformazione

$$(49) \qquad L_j = \frac{\partial S}{\partial l_j}(\mathbf{l}, \mathbf{L}') \qquad l'_j = \frac{\partial S}{\partial L'_j}(\mathbf{l}, \mathbf{L}'),$$

con $\mathbf{L}'$ costante, definisce un'applicazione dal toro di variabili angolo $\mathbf{l}'$ nello spazio delle fasi di variabili $(\mathbf{l}, \mathbf{L})$ [cfr. Arnol'd 1974].

Per comprendere il significato di questa applicazione definita dalle (49) occorre osservare che nel sistema di hamiltoniana $K(\mathbf{L}')$ le L'_j sarebbero integrali primi. Ora tale sistema non può essere definito in grande, ma solo per valori fissati delle L'_j: allora a tali valori corrispondono dei tori invarianti che restano tali anche nel sistema di hamiltoniana $H(\mathbf{l}, \mathbf{L})$ e che sono parametrizzati dalle (49). Questi tagliano, nel caso a due gradi di libertà, le curve invarianti sulle superfici di sezione, che gli esperimenti numerici facevano ipotizzare.

Si tratta ora di trarre delle conclusioni dal punto di vista della stabilità: la teoria di Kolmogorov-Arnol'd-Moser consente di ottenere risultati «stabili» nei problemi hamiltoniani perturbati, come per esempio quello dei tre corpi?

La risposta è, per l'ennesima volta, non cosí netta come si potrebbe sperare. Per convincersene si ritorni un momento al caso di due sole variabili angolo, e alla rappresentazione schematica della figura 5 visto che teoria ed esperimenti numerici convergono nell'indicazione di una struttura complicata delle soluzioni come quella disegnata. Anzi: di una struttura infinitamente complicata, di cui il disegno dà solo un'idea molto parziale (come diceva Poincaré).

Nessuna regione della superficie di sezione è completamente riempita da curve invarianti, perché i razionali sono densi, e quindi tra due curve invarianti conservate dalla perturbazione vi sono sempre dei tori «distrutti» e sostituiti

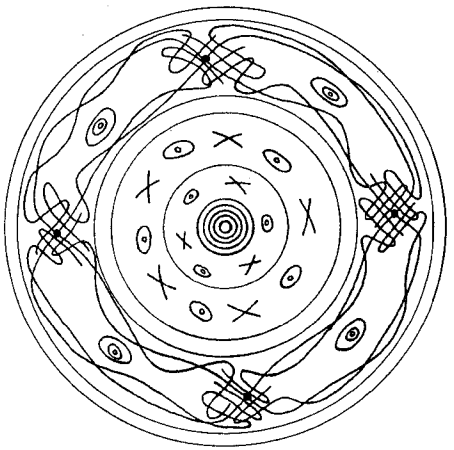


Figura 5.
Regioni ordinate e regioni caotiche, viste su di una sezione. (Da Arnol'd e Avez 1967).

da orbite periodiche isolate. Perciò se le condizioni iniziali di un'orbita stanno su di una curva invariante, l'orbita starà sempre su tale curva invariante, e per di piú le serie del tipo (33) oppure (47) forniscono un modo operativo di calcolare l'orbita per un tempo arbitrariamente lungo con precisione arbitrariamente grande. Se però le condizioni iniziali cambiano anche solo di pochissimo, può accadere che l'orbita vada a cadere in una regione «caotica» generata da una risonanza, e perciò le predizioni basate sulle formule del tipo (33) o (47) non sono stabili nel senso rigoroso del termine. Però se una «regione caotica» è a forma di corona circolare, limitata all'interno e all'esterno da due curve invarianti, un'orbita che parte in tale regione dovrà per forza restare confinata tra le due curve invarianti. Se la regione compresa tra due curve invarianti è molto sottile, l'orbita che oscilla in tale corona sarà sí instabile, nel senso che non sarà possibile controllare il suo movimento all'interno della corona, ma l'ampiezza di tale instabilità sarà determinata dall'ampiezza della corona e perciò molto piccola. In altre parole si pone il problema inverso di quello che ci si era posti di fronte ai risultati degli esperimenti numerici: se il risultato è instabile, ma in pratica l'instabilità è cosí piccola da confondersi con gli errori che si commettono nei calcoli, e molto piú piccola degli errori osservativi, allora il risultato è praticamente stabile.

Anche questo risultato, positivo sebbene ambiguo, è però dotato di una validità limitata. Infatti se si torna al caso generale di $2n$ variabili, $n > 2$, i tori invarianti sono ancora presenti (in questo caso tori di dimensione $n > 2$) però due tori vicini non delimitano una regione di spazio delle fasi che sia invariante, come nel caso di due circonferenze nel piano. Perciò le orbite che partono dai varchi, aperti dalle risonanze nel tessuto dei tori invarianti, possono passare tra toro e toro e sfuggire lontano, dando luogo anche alle forme piú plateali d'instabilità, come per esempio sfuggire all'infinito o verso una singolarità (diffusione di Arnol'd).

Perciò questa ricerca sulla stabilità del problema degli n corpi (e di tutta la classe dei sistemi hamiltoniani «perturbati») non ha ancora avuto una conclusione. Per concludere con una battuta (ripresa da Roy) il problema degli n corpi, accusato di stabilità, è assolto per insufficienza di prove. Ma il processo continua. [A. M.].

Arnol'd, V. I.
1974 *Matematičeskie metodi klassičeskoi mehaniki*, Nauka, Moskva (trad. it. Editori Riuniti, Roma 1979).

Arnol'd, V. I., e Avez, A.
1967 *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris.

Birkhoff, G. D.
1927 *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, New York.

Brouwer, D., e Clemence, G. M.
1961 *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York.

Goldstein, H.
1950 *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading Mass. (trad. it. Zanichelli, Bologna 1971).

Moser, J.
1973 *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press, Princeton N.J.

Poincaré, H.
1892-99 *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris.

Siegel, C. L., e Moser, J.
1971 *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer, Berlin - New York.

Szebehely, V. G.
1967 *Theory of Orbits: the Restricted Problem of Three Bodies*, Academic Press, New York.

Tisserand, F.-F.
1889-96 *Traité de mécanique céleste*, 4 voll., Gauthier-Villars, Paris.

Wintner, A.
1941 *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, Princeton N.J.

Non esiste una definizione rigorosa di 'stabilità' che comprenda tutti i casi in cui questo termine è usato nella **ricerca** scientifica contemporanea (cfr. **scienza**). Nei lavori dei matematici si trovano invece molte definizioni di solito differenziate l'una dall'altra mediante vari attributi, e l'unico **metodo** praticabile per giungere all'**unità** è quello di ricorrere a una definizione di carattere metamatematico (cfr. **logica**, **linguaggio**); questo modo di procedere non è però ugualmente ben accetto a tutta la comunità scientifica (cfr. **paradigma**, **spiegazione**).

Una proprietà definita nell'ambito di una **struttura** matematica (cfr. **strutture matematiche**) è di stabilità o di instabilità se essa individua, in senso positivo o negativo, l'attitudine di un **oggetto** matematico (cfr. anche **formalizzazione**) della struttura stessa ad essere impiegato come **modello** della realtà (cfr. **reale**), ove 'modello' è inteso in senso strettamente empirico (cfr. **empiria/esperienza**) e operativo (cfr. **operazioni, operatività**). Ma un modello può anche essere costituito da un'equazione – nel senso generalizzato di relazione tra diverse variabili a valori in oggetti di una teoria matematica data (cfr. **teoria/modello**, **matematiche**) – e dall'**interpretazione** di alcune variabili in gioco come grandezze osservabili (cfr. **osservazione**, **simulazione**, **legge**, **teoria/pratica**). Determinare un limite massimo (cfr. **soglia**) per l'**errore** di predizione introdotto dall'**approssimazione** è il problema della stabilità; in particolar modo il problema sarà stabile se l'errore di predizione dipenderà in modo continuo dalle approssimazioni introdotte (cfr. **funzioni**, **continuo/discreto**, ma anche **dipendenza/indipendenza**, **calcolo**). Va osservato che l'instabilità stessa può essere stabile, e quindi costituire una previsione (cfr. **previsione e possibilità**) legittima: questo è il tema della teoria della stabilità piú raffinata, la teoria delle **catastrofi** (cfr. anche **locale/globale**, **qualità/quantità**).

In questo articolo ci si riferisce a quello che è forse il piú celebre di tutti i modelli matematici del **mondo** fisico (cfr. **fisica**), quello che descrive un **sistema** di corpi celesti, come per esempio il sistema solare (cfr. **astronomia**, **cosmologie**, **gravitazione**, **moto**, **pianeti**, **sole**), e le considerazioni matematiche che vi intervengono (cfr. **differenziale**, **infinitesimale**, **variazione**) sono finalizzate a una descrizione quanto piú possibile adeguata.

Variazione

Il fisico sperimentale indaga la natura scoprendo via via i suoi fenomeni e formulando le leggi che li descrivono. Il matematico ha la presunzione di rendere evidente perché un fenomeno ubbidisce a una legge piuttosto che a un'altra. Pertanto il matematico è spinto a considerare le ipotetiche variazioni delle leggi fisiche.

1. *Indagine dei fenomeni fisici mediante i metodi della matematica.*

Nella maggioranza dei casi, i fenomeni fisici vengono descritti da applicazioni o funzioni (si veda l'articolo «Applicazioni» in questa stessa *Enciclopedia*). Nei casi piú semplici queste funzioni rappresentano la configurazione di un oggetto o l'evolvere di un fenomeno al variare del tempo. Ad esempio la configurazione di equilibrio di una corda di un piano (x, y), fissata agli estremi (a, o), (b, o) e sottoposta all'azione di forze che agiscono nella direzione dell'asse y, può essere descritta da una funzione $y = f(x)$, $x \in [a, b] = I$, dove $f(a) = f(b) = 0$. Il moto di una particella materiale (identificata con un punto P) è descritto da una funzione che fornisce la posizione del punto nei vari istanti di tempo: $P = P(t)$. Questa funzione che descrive il moto si ottiene, almeno negli stadi iniziali della scienza, interpolando diverse misure in tempi diversi. Si pensi alle esperienze di Galilei sulla caduta dei gravi.

Ma in uno stadio piú avanzato nasce l'esigenza di esprimere la legge del moto non solo in base alle misure ripetute dell'esperienza; occorre trovare delle leggi generali che ci facciano conoscere le funzioni che lo descrivono. Nascono cosí le leggi generali della meccanica.

Per poter esprimere queste leggi generali occorre considerare non solo le funzioni che rappresentano il fenomeno, ma anche alcune particolari forme lineari o di grado superiore che si ottengono da queste mediante le variazioni locali.

L'idea di variazione, che si può ritrovare fin agli albori del calcolo infinitesimale, è alla base anche delle teorie piú moderne con diverse nomenclature. Oggi si parla piuttosto di incrementi, di differenziali, di *test functions*, ecc. ecc. Sono queste nozioni che permettono di dedurre le evoluzioni di un punto materiale se il suo stato e la velocità al momento iniziale del moto sono noti. Ciò si collega alla teoria matematica delle equazioni differenziali ordinarie e al cosiddetto problema di Cauchy.

S'incomincerà con il prendere in esame un classico problema di ottica, accettando l'osservazione che la luce procede in linea retta se non ci sono ostacoli sul suo cammino e che i raggi non interferiscono l'uno con l'altro; e si studierà il comportamento della luce quando colpisce vari materiali. L'oggetto piú semplice è uno specchio. Quando la luce ne colpisce uno, essa viene respinta in una nuova linea retta che varia quando viene cambiata l'inclinazione dello specchio.

I due raggi, quello incidente e quello riflesso, sono tali che gli angoli che ciascuno di essi forma con la normale allo specchio nel punto d'incidenza sono uguali. Inoltre i due raggi e la normale sono nello stesso piano.

Un problema piú difficile s'incontra quando la luce passa da un mezzo a un altro, per esempio dall'aria all'acqua; anche qui si vede che la luce non si propaga in linea retta, ma nell'acqua il raggio s'inclina rispetto al suo percorso nell'aria. Indicando con ϑ_i l'angolo che il raggio di luce nell'aria forma con la normale alla superficie di separazione fra l'aria e l'acqua e con ϑ_r l'angolo che il raggio di luce nell'acqua (raggio rifratto) forma con la stessa normale, la relazione fra l'inclinazione dei due raggi è data dalla formula

$$\frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_r} = k = \text{costante}.$$

Anche in questo caso i due raggi e la normale sono nello stesso piano.

Ora, nell'ulteriore sviluppo della scienza, si richiede qualcosa di piú di una semplice formula. Dapprima sono state fatte delle osservazioni, poi si hanno delle misure che convalidano l'osservazione e quindi si ha una legge che compendia tutte le misure. Ma la vera aspirazione della scienza è di trovare un modo di pensare che renda evidente la legge.

Il ragionamento che rese evidente la legge sul comportamento della luce è il principio di Fermat, chiamato anche principio del tempo minimo. L'idea di Fermat è questa: fra tutti i possibili cammini che la luce può seguire per andare da un punto a un altro, essa segue il cammino che richiede il minor tempo. In altre parole, se la luce va da un punto A a un punto B seguendo un certo cammino, ogni variazione fa impiegare alla luce un tempo maggiore.

Da questo principio discende dapprima la legge della propagazione in linea retta. È possibile verificare che da esso discende anche la legge di riflessione dello specchio. Nella figura 1 sono indicati due punti A e B e uno specchio

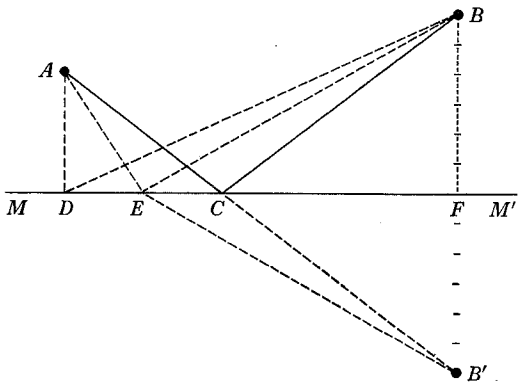


Figura 1.
La somma delle lunghezze $AE + EB$ è minima, perché è minima la somma $AE + EB'$.

piano MM'. Quale è il modo per andare da A a B nel piú breve tempo possibile? Evidentemente andare in linea retta da A a B. Ma si aggiunga la condizione in piú che la luce deve colpire lo specchio e ritornare nel piú breve tempo possibile.

Un modo potrebbe essere di andare il piú rapidamente possibile allo specchio e quindi andare in B, lungo il cammino ADB. Naturalmente si ha allora che il tratto DB è lungo. Se ci si sposta un po' a destra di D fino ad E, si aumenta leggermente la prima distanza ma diminuisce di piú la seconda, e cosí la lunghezza totale, e quindi il tempo impiegato nel percorso, è minore. Quale sarà il punto C per il quale il tempo è minimo? Lo si può determinare con una semplice considerazione geometrica.

Si consideri il punto B' simmetrico di B rispetto ad MM'. Poi si tracci il segmento EB'. Quindi la somma delle due distanze $AE+EB$, che è proporzionale al tempo impiegato dalla luce per percorrerla a velocità costante, è anche la somma delle due lunghezze $AE+EB'$. Quindi il problema consiste nel determinare il punto E in modo che la somma delle due lunghezze sia minima. La risposta diventa cosí molto semplice: quando il segmento EB' è sul prolungamento del segmento AE; ciò avviene quando E è nell'intersezione C del segmento AB' con MM'. Qui l'angolo che AC forma con la normale è uguale a quello che CB' (e anche CB) forma con la stessa normale. Cosí l'affermazione che l'angolo d'incidenza è uguale all'angolo di riflessione è equivalente all'affermazione che la luce va allo specchio in modo tale da giungere in B' nel minor tempo possibile. Poiché la velocità della luce è costante, invece di rendere minimo il tempo si è cercato di rendere minimo il cammino della luce.

Per la rifrazione, la luce non segue il percorso di minima distanza in quanto la velocità della luce nell'aria è diversa (maggiore) dalla velocità che essa ha nell'acqua.

Siamo cosí ricondotti a un problema della natura seguente. Siano assegnati, in un piano, due punti A e B da parti opposte rispetto a una retta r (fig. 2). Un punto mobile va da A ad un punto P della retta r con velocità v e da tale punto al punto B con velocità w. Si cerca quale è il cammino che viene percorso nel minor tempo possibile.

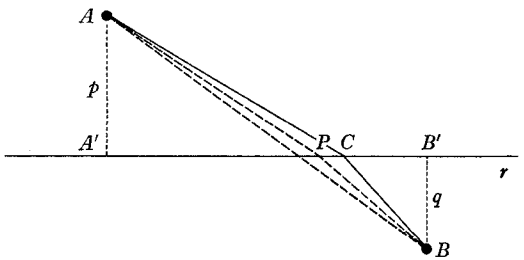


Figura 2.

Il tratto AP è percorso con velocità v, il tratto PB con velocità w. Il tempo totale è il minimo possibile.

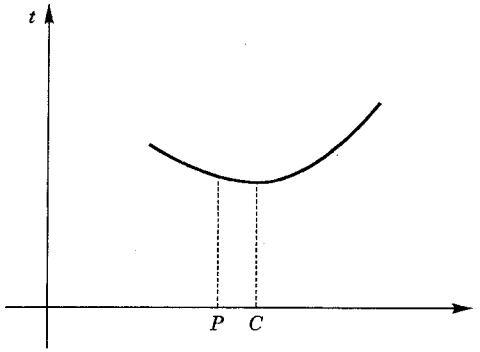


Figura 3.

La curva rappresenta il tempo impiegato in funzione della posizione di P. Al punto C corrisponde il piú breve tempo possibile.

Indicando con t_1 e t_2 i tempi impiegati a percorrere i cammini AP e PB e con t il tempo totale si ha:

$$(1) \qquad t=t_1+t_2=\frac{\overline{AP}}{v}+\frac{\overline{PB}}{w}.$$

Si tratta dunque di trovare il punto P su r in modo che il tempo t corrispondente al cammino APB sia il piú piccolo possibile. Sia C la posizione del punto P che fornisce il valore minimo per t: questo significa che spostando su r il punto P dalla posizione C il cammino APB è percorso in un tempo maggiore.

S'immagini di riportare su un grafico il tempo impiegato in funzione della posizione del punto P. Si ottiene una curva del tipo indicato nella figura 3. Al punto C corrisponde il tempo piú breve possibile. Con alcune semplici considerazioni di analisi matematica, alle quali si accennerà in seguito, risulta che il punto C è l'unico punto sull'asse r dove la variazione è nulla ed in corrispondenza di esso è soddisfatta la legge di rifrazione della luce.

Il problema considerato è abbastanza semplice, perché i cammini della luce vengono individuati dalla posizione del punto P sull'asse r, cioè da una sola variabile in quanto la luce si muove in linea retta nell'aria e nell'acqua con velocità costanti. Le considerazioni fin qui svolte spingono a soffermarsi sull'analisi dei punti di minimo di una funzione $f(x)$.

2. *Punti stazionari di una funzione.*

Sia $f(x)$ una funzione reale definita in un intervallo I dell'asse reale. Ciò vuol dire che a ogni numero reale x dell'intervallo I corrisponde un numero reale.

Introdotto un sistema di assi cartesiani (x, y), dopo aver fissato le unità di

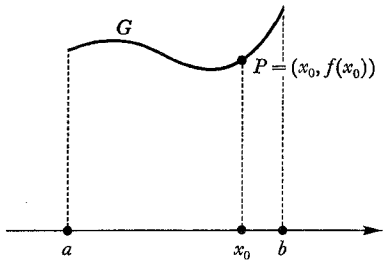


Figura 4.
G è il grafico di una funzione. P ha le coordinate $(x_0, f(x_0))$.

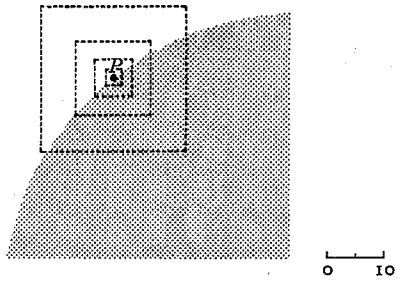


Figura 5.
Il rapporto di ingrandimento α viene aumentato sempre di piú.

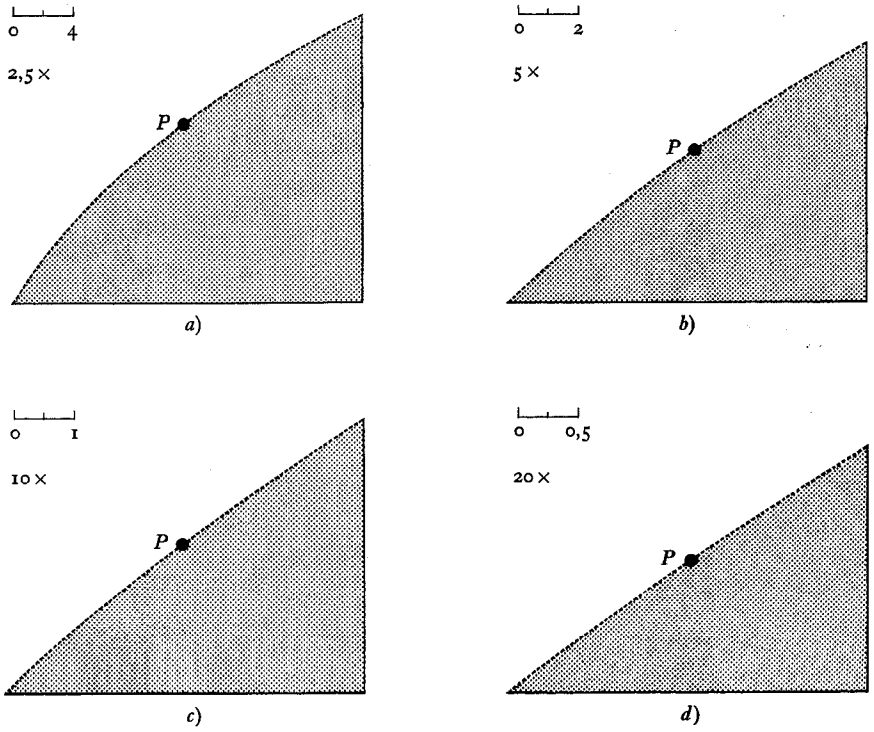


Figura 6.
Gli ingrandimenti «tendono» ad essere rettilinei.

misura su di essi si consideri l'insieme G dei punti $(x, f(x))$ al variare di x in I. Questo insieme che costituisce il grafico della funzione $f(x)$ ha la proprietà che ogni retta parallela all'asse y incontra G in un punto al piú. Viceversa, un insieme G che gode della suddetta proprietà determina una funzione $f(x)$. I valori di x per i quali la retta, parallela all'asse y, passante per il punto (x, o) incontra G è il dominio della funzione. Per semplicità si considereranno funzioni il cui dominio sia un intervallo $I = [a, b]\{x: a \leq x \leq b\}$, dove i punti x per cui $a < x < b$ sono i punti interni all'intervallo mentre a e b sono i due estremi.

Sia x_0 un punto interno all'intervallo I e $P = (x_0, f(x_0))$ il punto corrispondente di G (fig. 4). S'immagini di fotografare l'insieme G inquadrando un rettangolo intorno a P e ottenendo una diapositiva tale che il punto P sia nel centro di essa (cioè nel punto d'incontro delle due diagonali) (fig. 5). Si proietti ora questa diapositiva su uno schermo aumentando sempre di piú il rapporto d'ingrandimento α. Questi ingrandimenti rivelano, esaltandolo sempre di piú, il comportamento dell'insieme G vicino al punto P. Accade nella generalità dei casi che questi ingrandimenti «tendono» a divenire sempre piú una linea retta passante per il punto P, il quale rimane fisso nel procedimento di ingrandimento (fig. 6). Questa retta che cosí si ottiene svolge un ruolo di primaria importanza nello studio della funzione $f(x)$.

Non è possibile nella pratica spingere l'ingrandimento oltre un certo valore, ma non si hanno difficoltà teoriche a pensare che ciò possa avvenire. In questo fatto è racchiusa l'idea di limite.

La retta alla quale si è giunti con questo procedimento ha un'equazione $y = f(x_0) + m(x - x_0)$, dove m misura l'inclinazione della retta stessa, cioè $m = \operatorname{tg}\vartheta$, dove ϑ è l'angolo che la retta forma con l'asse x. Questo numero m è la derivata della funzione $f(x)$ nel punto x_0, cioè

$$(2) \qquad m = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

L'espressione $m(x - x_0)$ è una forma lineare nella indeterminata $x - x_0$ e prende il nome di differenziale della funzione nel punto x_0.

La definizione matematica è la seguente:

DEFINIZIONE. *La funzione $f(x)$ è differenziabile (cioè dotata di differenziale in un punto x_0) se esiste una forma lineare, nella indeterminata h, $m \cdot h$ tale che, posto*

$$(3) \qquad \omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - m \cdot h,$$

risulti

$$(4) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{|\omega(h)|}{|h|} = 0.$$

Di qui discende

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{\omega(h)}{h}$$

e quindi la (2).

La (3) fornisce un'informazione sulla variazione del valore della funzione $f(x_0+h)-f(x_0)$ in corrispondenza della variazione h della variabile x nelle vicinanze di x_0, cioè

$$f(x_0+h)-f(x_0)=m\cdot h+\omega(h)$$

dove $\omega(h)$ è molto piccolo rispetto alla variazione h.

Quindi $m\cdot h$ descrive, in prima approssimazione, il comportamento della variazione $f(x_0+h)-f(x_0)$ per h molto piccolo.

La definizione matematica del differenziale di una funzione in un punto x_0 traduce proprio la considerazione intuitiva fatta all'inizio di questo paragrafo.

In un sistema di assi cartesiani con l'origine nel punto P e con gli assi paralleli a quelli originari, l'ingrandimento di $f(x)$, di rapporto α, genera la funzione $\hat{f}(x)$ data da

$$\hat{f}(x)=\alpha\left[f\left(x_0+\frac{x-x_0}{\alpha}\right)-f(x_0)\right].$$

Questa nuova funzione $\hat{f}$ altro non è se non la funzione data f rappresentata in un sistema di assi cartesiani quando le unità di misura sono ingrandite nel rapporto α. Il fatto che $\hat{f}(x)$ tenda per α sempre piú grande alla retta $y=m(x-x_0)$ equivale proprio alla condizione (4).

Si è considerato il differenziale in un punto x_0, interno all'intervallo di definizione della funzione, ma è possibile introdurre il differenziale anche in un estremo dell'intervallo come limite dei differenziali nei punti interni vicini all'estremo considerato. Il differenziale in un punto x_0 dipende ovviamente solo dal comportamento della funzione nei punti vicini ad x_0.

All'inizio di questo paragrafo si è identificata una funzione $f(x)$ con il suo grafico G, ma la realizzazione di G, data la funzione $f(x)$, non è, in generale, un problema semplice, per cui si presentano degli interrogativi tendenti a chiarire il comportamento della funzione nelle vicinanze di un suo punto x_0, interno all'intervallo di definizione. A molti di questi quesiti si può dare una risposta per mezzo del suo differenziale. Ad esempio, la funzione $f(x)$ nel punto x_0 assuma il valore y_0, cioè $y_0=f(x_0)$. Per valori di y vicini ad y_0 ci sono ancora valori x, vicini ad x_0, dove $f(x)=y$? Il risultato al quale si giunge è evidente se visto sul grafico di $f(x)$.

TEOREMA. *Se il differenziale di $f(x)$ nel punto x_0 interno al suo intervallo di definizione non è identicamente nullo, per ogni y vicino ad y_0 esiste un valore x, vicino ad x_0, dove $f(x)=y$.*

Si osservi che dire che il differenziale non è identicamente nullo equivale al fatto che l'equazione

$$(5)\qquad m\cdot h=k$$

ammette sempre una e una sola soluzione, qualunque sia k. In altre parole, sapendo che $f(x_0)=y_0$, si può dedurre che l'equazione non lineare $f(x)=y$ ammette una soluzione, nelle vicinanze del punto (x_0, y_0), dalla considerazione che l'equazione lineare (di primo grado) (5) ammette sempre una soluzione unica qualunque sia il secondo membro.

Si passi ora alle definizioni seguenti:

DEFINIZIONE. *Una funzione $f(x)$ possiede un minimo nel punto x_0 se per tutti i punti x che sono sufficientemente vicini ad x_0 si ha $f(x)\geq f(x_0)$.*

DEFINIZIONE. *Una funzione $f(x)$ possiede un massimo nel punto x_0 se per tutti i punti x che sono sufficientemente vicini ad x_0 si ha $f(x)\leq f(x_0)$.*

A questo proposito si ha il seguente teorema:

TEOREMA. *Se la funzione $f(x)$ ha un punto di massimo (di minimo) in un punto x_0 interno all'intervallo di definizione dove esiste il differenziale, il suo differenziale è identicamente nullo, cioè $m=f'(x_0)=0$. In altre parole la retta $y=f(x_0)+$ $+m(x-x_0)$ è parallela all'asse x.*

È essenziale nell'enunciato precedente che il punto x_0 sia interno all'intervallo di definizione della funzione. Ad esempio la funzione $y=x$ considerata nell'intervallo $[0, 1]$ ha il minimo nel punto 0 dove il differenziale non è identicamente nullo.

Si osservi che possono esservi dei punti dove il differenziale esiste ed è identicamente nullo, ma la funzione non ha né punti di massimo né punti di minimo. Questi punti si chiamano punti stazionari della funzione (cfr. fig. 7). Quei particolari punti stazionari che sono anche punti di massimo o di minimo si chiamano punti estremanti.

Appare chiara l'importanza di saper calcolare le derivate (e quindi i differenziali) delle funzioni. Ogni corso di analisi matematica fornisce le regole di calcolo delle derivate: si tratta di semplici regole che ogni persona che voglia utilizzare la matematica deve conoscere.

A titolo di esempio si ritorni al problema della rifrazione della luce conside-

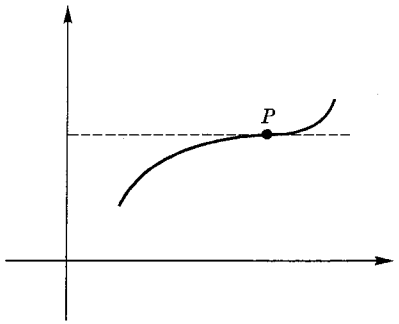


Figura 7.
P è un punto stazionario della funzione.

rato nel § 1 (fig. 2). Siano p, q le distanze di A e B dalla retta r, A', B' le proiezioni ortogonali di A e B su r, x la distanza di P da A' contata positivamente nel verso da A' a B'. Posto $A'B'=\ell$, il tempo complessivo impiegato a percorrere il cammino $AP+PB$ è dunque, in funzione di x,

$$t=f(x)=\frac{\sqrt{p^2+x^2}}{v}+\frac{\sqrt{q^2+(\ell-x)^2}}{w}.$$

Derivando $f(x)$ si ha:

$$f'(x)=\frac{x}{v\sqrt{p^2+x^2}}-\frac{\ell-x}{w\sqrt{q^2+(\ell-x)^2}},$$

e questa derivata si annulla quando vale l'uguaglianza

$$\frac{x}{v\sqrt{p^2+x^2}}=\frac{\ell-x}{w\sqrt{q^2+(\ell-x)^2}},$$

la quale esprime che gli angoli ϑ_i e ϑ_r che AP e BP formano con la normale in P alla retta r soddisfano la relazione

$$\frac{\sin\vartheta_i}{\sin\vartheta_r}=\frac{v}{w}.$$

Questa relazione esprime appunto la legge di rifrazione della luce e spiega che la costante k è il rapporto della velocità della luce nell'aria e nell'acqua. Essa è approssimativamente 1,33.

Si è considerato il teorema dei massimi e dei minimi; esso fornisce una condizione necessaria perché una funzione abbia un punto di minimo interno all'intervallo di definizione. Se si fa cadere la restrizione che x_0 sia interno all'intervallo, il risultato è il seguente:

TEOREMA. *Se la funzione $f(x)$, differenziabile in un intervallo I, ha in x_0 un punto di minimo, allora*

(6) $\qquad f'(x_0)(x-x_0)\geq 0 \qquad$ *per ogni $x\in I$.*

Quando x_0 è interno ad I, dalla (6) segue, poiché il fattore $(x-x_0)$ può cambiare segno, che $f'(x_0)=0$. Se x_0 coincide con il primo estremo a, segue, poiché il fattore $x-a$ è non-negativo, che $f'(a)\geq 0$. Se invece x_0 coincide con il secondo estremo b, segue che $f'(b)\leq 0$.

Nell'enunciato di questo teorema si vede bene che nel caso di un punto x_0 interno all'intervallo di definizione le variazioni «ammissibili» sono arbitrarie, mentre nel caso che x_0 cada in un punto estremo dell'intervallo di definizione sono ammissibili solo alcune variazioni. Nel caso che $x_0=a$ la variazione $x-x_0$ può assumere soltanto valori positivi, mentre nel caso $x_0=b$ la variazione $x-x_0$ può assumere soltanto valori negativi.

Sono stati cosí presentati alcuni risultati del calcolo differenziale di una fun-

zione di una sola variabile in una forma che si presta bene a varie generalizzazioni che costituiscono aspetti tra i piú interessanti della matematica moderna. Si vedrà ora come esse possono presentarsi in contesti piú generali.

3. *Funzioni di piú variabili.*

Sempre rimanendo nel campo dell'ottica, si supponga di avere due specchi paralleli s_1 e s_2 con le superfici riflettenti rivolte l'una contro l'altra (fig. 8). Una situazione di questo genere può succedere di trovarla nelle botteghe dei barbieri. Un raggio di luce, partendo da A, arriva a B dopo essersi riflesso prima su s_1 e poi su s_2. Fra tutti i cammini soddisfacenti a queste regole trovare quelli di lunghezza (e quindi di tempo) minima. I cammini «ammissibili» in questo problema sono del tipo AP_1P_2B.

Dette x_1 e x_2 le distanze di P_1 e P_2 dalla retta perpendicolare agli specchi passante per A, la lunghezza del cammino considerato è un numero che dipende, fissati A, B e gli specchi, da x_1 e x_2.

Si tratta quindi di considerare una funzione di due variabili x_1, x_2 definita in un quadrato $Q=\{0\leq x_1\leq\ell,\ 0\leq x_2\leq\ell\}$ (dove ℓ è la distanza su uno degli specchi di A da B).

Una funzione $f(x_1, x_2)$ definita nell'insieme Q delle coppie (x_1, x_2) tale che $0\leq x_1\leq\ell$, $0\leq x_2\leq\ell$ associa a ogni coppia (x_1, x_2) un numero reale.

Introdotto un sistema di assi cartesiani (x_1, x_2, y), si consideri l'insieme G dei punti $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ al variare di (x_1, x_2) in Q. Questo insieme costituisce il grafico della funzione; esso è un insieme dello spazio a tre dimensioni.

Analogamente al caso considerato nel § 2, il principio di Fermat conduce a ricercare quelle coppie (x_1^0, x_2^0) di Q dove la funzione $f(x_1, x_2)$ è minima, cioè $f(x_1,x_2)\geq f(x_1^0,x_2^0)$ per ogni coppia (x_1, x_2) vicina a (x_1^0, x_2^0).

Questo problema, come nel caso precedente, si può risolvere facilmente con considerazioni geometriche. Sia s_2' la retta simmetrica di s_2 rispetto allo specchio s_1, sia B' il simmetrico di B rispetto allo specchio s_1 e B'' il simmetrico di B' rispetto alla retta s_2' (fig. 9). La lunghezza del cammino AP_1P_2B è uguale alla lunghezza del cammino $AP_1P_2'B''$. Questo secondo cammino sarà minimo quando i punti $AP_1P_2'B''$ sono allineati e di qui discende che i punti P_1 e P_2 de-

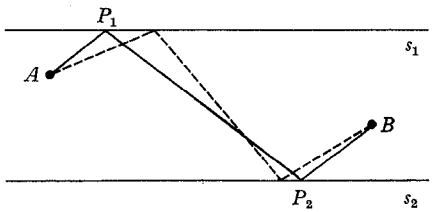


Figura 8.

s_1 ed s_2 sono specchi paralleli con le superfici riflettenti rivolte l'una contro l'altra.

vono essere tali che in ciascuno di essi sia rispettata la legge di riflessione della luce.

Se invece dei cammini che vanno da A a B dopo due riflessioni si considerano cammini che vanno da A a B dopo tre o piú riflessioni, si è ricondotti in maniera analoga a considerare funzioni di piú variabili.

La stessa situazione si presenta se ci si propone di considerare il cammino che la luce percorre per andare da un punto A a un punto B attraversando un numero finito di mezzi trasparenti ma di natura diversa.

Anche in questi casi si è condotti a considerare il differenziale di una funzione di piú variabili seguendo il suggerimento di quanto detto nel caso di una funzione di una variabile.

Sia $f(x)$, dove x sta per le n-ple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, una funzione a valori reali definita per tutti gli x vicini ad $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Si consideri la famiglia di funzioni, dipendenti da un parametro $\alpha > 0$,

$$f(h) = \alpha\left[f\left(x_0 + \frac{h}{\alpha}\right) - f(x_0)\right],$$

dove $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

Se per α tendente all'infinito queste funzioni tendono a una forma lineare

$$(7) \qquad Ah = A_1h_1 + A_2h_2 + \ldots + A_nh_n$$

la funzione $f(x)$ si dice differenziabile in x_0 e la forma lineare (7) si chiama il differenziale di $f(x)$ in x_0. Le quantità $A_1, A_2, \ldots, A_n$, che dipendono da x_0, sono le derivate parziali di f in x_0 e si indicano con i simboli $f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n}$, oppure con i simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

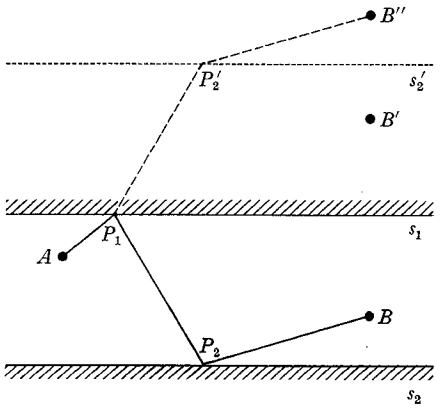


Figura 9.

Anche in questo caso il problema del tratto ottimale (AP_1P_2B) è risolto con semplici considerazioni di simmetria.

Una funzione $f(x)$ ha un minimo (massimo) in x_0 se $f(x) \geq f(x_0)$ $(\leq)$ per tutti i valori di x vicini a x_0. Sussiste un teorema analogo a quello di p. 969:

TEOREMA. *Se la funzione $f(x)$ ha un minimo (massimo) in x_0 ed è ivi differenziabile, il suo differenziale è identicamente nullo.*

Sia $f(x)$ un'applicazione di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^n$; ciò vuol dire che ad ogni n-pla $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ corrisponde una n-pla $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Si è cosí condotti a considerare n funzioni $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$. L'applicazione $f(x)$ è differenziabile in x_0 se ciascuna funzione $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, è differenziabile in x_0. Il differenziale dell'applicazione $f(x)$ è l'applicazione lineare

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}h_j \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

che applica $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^n$. I coefficienti A_{ij} sono le derivate parziali $\partial f_i/\partial x_j$ della funzione f_i rispetto alla variabile x_j calcolate in x_0.

Un teorema analogo a quello di p. 968 permette di affermare:

TEOREMA. *Sia $f(x)$ un'applicazione di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^n$ tale che $f(x_0) = y_0$. L'applicazione sia differenziabile e inoltre il sistema lineare*

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}h_j = k_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ottenuto uguagliando il differenziale in x_0 alla n-pla $k_1, \ldots, k_n$ ammetta una e una sola soluzione per ogni valore di $k_1, \ldots, k_n$. Allora il sistema non lineare

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ammette un'unica soluzione vicino ad x_0 per ogni y vicino a y_0.

4. *Spazi di dimensione infinita.*

La configurazione di un ente fisico non è sempre descrivibile con un numero finito di parametri come accadeva negli esempi considerati nei paragrafi precedenti.

La necessità di considerare spazi a infinite dimensioni si presenta nello studio di numerosi problemi di matematica e di fisica. Sempre rimanendo nel campo dell'ottica, i problemi considerati precedentemente erano semplificati dal fatto che si è assunta costante la densità dei mezzi (aria o acqua), per cui la traiettoria della luce, essendo rettilinea in ciascun mezzo, è individuata dalla posizione dei punti dove la luce cambia direzione. Ma la situazione sarebbe stata diversa se fosse stata considerata la luce proveniente da una stella, in quanto essa incontrerebbe mezzi di densità variabile; infatti l'atmosfera della Terra è rarefatta in alto e densa negli strati bassi. La luce viaggia piú lentamente nell'aria di quanto faccia nel vuoto. La luce quindi, anziché decidere di arrivare in un

punto P in modo rettilineo, per impiegare il minimo tempo valuta quanto stare nella regione nella quale va piú veloce; essa segue perciò una linea curva.

Il principio di Fermat impone di considerare fra le curve che congiungono due punti quella per cui il tempo T impiegato a percorrerla è minimo. Il tempo T non è piú un numero associato a un numero finito di parametri, ma un numero associato a tutto il comportamento dei cammini possibili congiungenti due punti. Se si rappresenta con la funzione $y(x)$ il cammino che la luce percorre per andare da un punto A a un punto B si è ricondotti a cercare quella funzione $y(x)$ tale che $A=(a, y(a))$, $B=(b, y(b))$ e che minimizza l'integrale

$$(8) \qquad \int_a^b n(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx,$$

dove $n(x)$ rappresenta l'inverso della velocità della luce nel punto $(x, y(x))$.

Alcuni problemi di questa natura furono già posti sin dalle origini del calcolo delle variazioni alla fine del XVII secolo da Newton e da Bernoulli. Newton nel 1686 pose il problema del solido di rivoluzione di minor resistenza. È un problema che ha una notevole importanza pratica, interessando in modo essenziale la navigazione subacquea, l'aeronavigazione, la balistica. Quale è la forma piú conveniente da darsi a un sommergibile, a un dirigibile, a un proiettile, a un missile, perché essi, muovendosi nell'acqua o nell'aria, incontrino la minor resistenza possibile e quindi, con una data forza motrice, raggiungano la massima velocità? Il problema matematico si può formulare nel modo seguente: determinare la curva piana che unisce due punti dati A e B e che, ruotando attorno a un asse, appartenente al suo piano e passante per A, genera una superficie di rivoluzione la quale, muovendosi, secondo il suo asse, in un mezzo omogeneo, incontri la minima resistenza.

Per tradurre analiticamente il problema, si consideri nel piano determinato dall'asse di rotazione e dal punto B un sistema di assi cartesiani ortogonali avente l'asse x coincidente con l'asse di rotazione. Rappresentata allora mediante la funzione $y(x)$, con le condizioni $y(a)=0$, $y(b)=y_b$, la curva da determinarsi, la resistenza incontrata dalla superficie di rotazione è data dalla formula

$$(9) \qquad R=k\int_a^b \frac{yy'^3}{1+y'^2}\,dx,$$

dove a e b indicano le ascisse dei punti A e B, k una costante, dipendente dalla velocità della superficie in moto. Nello scrivere l'espressione di R si è supposto che la resistenza sia proporzionale alla proiezione della velocità del moto sulla normale alla superficie.

Si consideri ancora un altro problema che interessa le applicazioni. Sia data una membrana elastica, cioè una superficie elastica piana in posizione di riposo, si flette liberamente e reagisce solo contro ogni tentativo di estenderla. In posizione di riposo la membrana occupi un dominio Ω del piano x, y. Si deformi il contorno della membrana in una direzione perpendicolare al piano x, y e si indichi con $g(x, y)$ lo spostamento del punto (x, y) del contorno. Allora anche l'interno della membrana viene deformato e ci si propone di determinare la posizione di equilibrio della membrana per una data deformazione del suo contorno.

Assumendo che tutti i punti della membrana si spostino perpendicolarmente al piano x, y, si indichi con $u(x, y)$ lo spostamento del punto (x, y). La posizione di equilibrio della membrana è quella che fornisce il piú piccolo valore possibile all'energia potenziale della deformazione fra tutte le deformazioni ammissibili. Le deformazioni ammissibili definiscono un insieme di funzioni tali che $u(x, y)=g(x, y)$ quando il punto (x, y) appartiene al contorno di Ω. L'energia potenziale di deformazione è data, in una buona approssimazione, dal cosiddetto integrale di Dirichlet

$$(10) \qquad \iint_\Omega (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$$

dove u_x e u_y sono le derivate parziali della funzione $u(x, y)$ (cioè i coefficienti del suo differenziale).

Un altro problema analogo al precedente è il seguente. Invece di deformare il contorno della membrana come precedentemente, si ponga un ostacolo sul piano x, y, ma al di sotto della membrana, tenendo fissi i punti del contorno della membrana e ci si domandi quale sarà la posizione di equilibrio della membrana in questa situazione. Il problema matematico è quello di ricercare il minimo dell'integrale di Dirichlet fra tutte le funzioni $u(x, y)$ nulle al bordo di Ω e che descrivono le configurazioni ammissibili, cioè quelle che fanno stare la membrana al di sopra dell'ostacolo.

5. *Le equazioni differenziali del calcolo delle variazioni.*

Gli esempi considerati finora possono fornire un'idea del tipo di problemi che s'incontrano in calcolo delle variazioni.

Sia V un insieme di oggetti di natura qualsiasi. La natura di questi oggetti può essere del tipo piú vario. Gli oggetti possono essere numeri, punti dello spazio, curve, funzioni, superfici o anche moti di un sistema meccanico. Essi sono gli elementi dell'insieme V e saranno indicati con la lettera x.

Ad ogni elemento x dell'insieme V corrisponde un numero reale y; sarà allora definita un'applicazione di V in $\mathbf{R}$ (l'insieme dei numeri reali). Queste applicazioni sono chiamate anche funzionali. Se l'insieme V è l'insieme dei numeri reali x, il funzionale è una funzione di una variabile. Se V è l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali, il funzionale è una funzione di due variabili e cosí via. Se V è un insieme di curve, un funzionale può essere definito associando a ciascuna di queste la sua lunghezza. Nel problema della luce e in quello di Newton il funzionale consiste nell'associare a ogni curva che congiunge A con B il valore degli integrali (8) e (9).

Il problema generale del calcolo delle variazioni è del tipo seguente: fra gli elementi x di V trovare quell'elemento (o quegli elementi) per il quale il valore del funzionale è il piú piccolo possibile.

All'inizio di questo articolo è stata richiamata una condizione necessaria per gli elementi che rendono minimo un funzionale, nel caso della funzione di una o piú variabili, la quale condizione esprime l'annullarsi del differenziale della funzione.

È possibile trovare una condizione necessaria nei problemi piú generali del calcolo delle variazioni che assicuri che un elemento di V fornisca un valore minimo al funzionale? Questo si può fare nel caso che gli elementi di V siano delle funzioni e il funzionale sia un integrale. Si consideri il caso dei cosiddetti integrali semplici del calcolo delle variazioni, cioè si supponga che il funzionale sia del tipo

$$(11) \qquad I(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))\,dx$$

dove $y(x)$ è una qualunque funzione dell'insieme V. La funzione F dipende dai tre argomenti x, y, y'.

L'elemento generico di V è una funzione $y(x)$ di x definita per $a\leq x\leq b$ ivi derivabile, che assuma in a o in b valori assegnati. A parte queste condizioni la funzione $y(x)$ può essere arbitraria. Di questo tipo sono il problema della luce e quello di Newton esposti nel § 4.

Si supponga che esista una funzione fra quelle ammissibili che rende minimo il funzionale $I(y)$.

Si consideri la famiglia di funzioni (dipendenti da un parametro α) $\bar{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$, dove $\eta(x)$ è una funzione derivabile che si annulla in a e b. In tal modo tutte le funzioni della famiglia sono funzioni ammissibili. L'integrale calcolato su tale famiglia diventa una funzione del parametro α

$$I(\bar{y})=\varphi(\alpha)=\int_a^b F(x,y+\alpha\eta,y'+\alpha\eta')\,dx.$$

Siccome si è supposto che $y(x)$ fornisca un minimo dell'integrale $I(y)$, la funzione $\varphi(\alpha)$ deve avere un minimo per $\alpha=0$. Il suo differenziale in questo punto deve annullarsi.

Un semplice calcolo fornisce, per ogni funzione η nulla in a e in b,

$$0=\varphi'(0)=\int_a^b [F_y(x,y,y')\eta+F'_{y'}(x,y,y')\eta']\,dx.$$

Questa condizione è l'analogo della condizione trovata per le funzioni di una o piú variabili ed esprime che sull'elemento $y(x)$ che fornisce il minimo dell'integrale deve annullarsi la variazione

$$\int_a^b [F_y(x,y,y')\eta+F'_{y'}(x,y,y')\eta']\,dx.$$

Il procedimento precedente si estende anche al caso di un integrale multiplo. Per semplicità si consideri il caso di un integrale doppio. Sia D un dominio del piano x, y. L'insieme delle funzioni ammissibili è definito dalle condizioni a) $u(x, y)$ è differenziabile in D, b) i valori della u sul contorno di D siano

assegnati: $u(x, y)=g(x, y)$; fra tutte queste funzioni cercare quella (o quelle) che rende minimo l'integrale

$$I(u)=\iint_D F(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y))\,dx\,dy.$$

Come prima, si supporrà che esista una funzione ammissibile che renda minimo l'integrale $I(u)$.

Si consideri la famiglia di funzioni, dipendenti da un parametro α, $\bar{u}(x, y)=u(x, y)+\alpha\eta(x, y)$, dove $\eta(x, y)$ è una funzione differenziabile in D che si annulla sul suo contorno. Allora, come prima, la funzione

$$I(\bar{u})=\iint_D F(x,y,u+\alpha\eta,u_x+\alpha\eta_x,u_y+\alpha\eta_y)\,dx\,dy=\varphi(\alpha)$$

deve avere un minimo per $\alpha=0$. Poiché, anche in questo caso, 0 è un punto interno dell'insieme di definizione della funzione $\varphi(\alpha)$, deve essere $\varphi'(0)=0$; di qui segue con semplici calcoli

$$(12) \qquad \iint_D \{F_u\eta+F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y\}\,dx\,dy=0.$$

Questa relazione esprime ancora che per una funzione u, la quale fornisca il minimo di $I(u)$, la variazione deve annullarsi.

Se la funzione $u(x, y)$ che minimizza l'integrale $I(u)$ è derivabile due volte, un ragionamento classico dimostra che u deve soddisfare l'equazione differenziale alle derivate parziali (che viene chiamata equazione di Eulero)

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0.$$

Per esempio il problema della posizione di equilibrio di una membrana, dopo aver deformato il contorno, corrisponde alla ricerca del minimo dell'integrale (10) con le condizioni al contorno $u=g$.

L'equazione di Eulero ha la forma

$$(13) \qquad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Quindi il problema di determinare lo spostamento subito da una membrana dopo la deformazione del contorno si riduce a cercare una funzione armonica (cioè soluzione dell'equazione $\Delta u=0$) che assuma i valori al contorno $u=g$. Se, invece di deformare il contorno, si considera la deformazione della membrana per effetto di un ostacolo posto al di sotto di essa, non si è piú condotti all'equazione di Eulero in quanto la famiglia $y+\alpha\eta$ non è formata da funzioni ammissibili per ogni α, e quindi non si può piú dedurre che $\varphi'(0)=0$.

Si denoti con $\psi(x, y)$ la superficie superiore dell'ostacolo. L'insieme delle funzioni ammissibili è quello delle funzioni che soddisfano le condizioni a) $u(x, y)$ è differenziabile in Ω, b) $u(x, y)$ si annulla sul contorno di Ω, c) $u(x, y)\geq\psi(x, y)$ in Ω. Si osservi che se u e v sono due funzioni ammissibili, la fun-

zione $tv+(1-t)u=u+t(v-u)$ è ancora ammissibile se $0\leq t\leq 1$. Ciò significa che l'insieme delle funzioni ammissibili è un convesso.

Si supponga che la funzione $u(x, y)$ fornisca il minimo dell'integrale (per esempio) di Dirichlet per tutte le funzioni ammissibili. Sia v un'altra funzione ammissibile; allora la funzione

$$\varphi(t)=\iint_D \{(u+t(v-u))_x^2+(u+t(v-u))_y^2\}\,dx\,dy$$

ha un minimo per $t=0$. Ciò implica che

$$\iint_D \{u_x(v-u)_x+u_y(v-u)_y\}\,dx\,dy\geq 0 \tag{14}$$

per ogni v ammissibile. Questo risultato è analogo a quello del teorema di p. 970. Con una nomenclatura recente si può dire che la funzione u che rende minimo l'integrale soddisfa alla disequazione variazionale (14).

6. *Gli sviluppi del calcolo delle variazioni.*

I problemi considerati nel paragrafo precedente rientrano in un importante capitolo dell'analisi matematica: il calcolo delle variazioni. Lo sviluppo di questo capitolo della matematica è strettamente connesso con quello della matematica stessa.

Fino alla fine del secolo scorso si ritenne ovvio che le soluzioni dei problemi in considerazione esistessero; risolvere il problema significava trovare le soluzioni in termini di formule esplicite o di costruzioni geometriche. Ad esempio, nel caso della riflessione della luce la risoluzione è data da una semplice costruzione geometrica e nel caso della rifrazione la risoluzione è data da una formula esplicita.

Questa presunzione, circa il modo di intendere risolto il problema, risultò, nello sviluppo della matematica, piuttosto gratuita e spinse i matematici a dare un significato piú ampio sul modo di intendere un problema risolto.

L'evolvere del significato di risoluzione di un problema è una delle caratteristiche della matematica cui ha concorso anche lo sviluppo di vari strumenti di calcolo sempre piú raffinati, quali i calcolatori elettronici. È infatti inutile avere, supposto che esista, una complicata formula matematica se poi nel calcolo numerico di essa si è costretti a calcolare dei valori approssimati. A questo scopo è piú interessante avere dei procedimenti che forniscono direttamente valori approssimati con un'approssimazione spinta quanto si vuole.

Il problema tipico del calcolo delle variazioni è, come si è accennato in precedenza, quello di trovare una funzione u: $\mathbf{R}^n\supset\Omega\to\mathbf{R}$ che minimizza o massimizza, in un insieme di funzioni ammissibili, l'integrale

$$I(u)=\int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\,dx$$

dove Ω è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ e ∇u indica l'insieme delle derivate di $u(x)$ e $f(x, u, p)$ è in generale continua con le derivate prime rispetto ai suoi argomenti.

Per considerare un caso semplice si supponga che le funzioni ammissibili consistano in quelle funzioni assumenti valori assegnati nel contorno $\partial\Omega$ di Ω.

La prima condizione necessaria che deve essere soddisfatta da una funzione estremante l'integrale $I(u)$ è che la variazione prima deve annullarsi su di essa. Di conseguenza la funzione estremante deve soddisfare l'equazione di Eulero con date condizioni al contorno.

Un'altra condizione necessaria è quella dovuta a Legendre la quale richiede che una funzione minimizzante deve soddisfare la condizione

$$\sum_{i=1}^n f_{p_ip_j}(x, u(x), \nabla u(x))\lambda_i\lambda_j\geq 0.$$

Essa esprime che la variazione seconda è non-negativa su una funzione minimizzante. Se nella condizione di Legendre il segno di uguaglianza vale solo quando $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ è nullo, l'integrale $I(u)$ è detto regolare e l'equazione di Eulero risulta essere di tipo ellittico. Si osservi che, ad esempio, per $n=2$, fissato x, u, la funzione $f(\alpha, u, p_1, p_2)$ come funzione delle componenti di ∇u è una funzione che ha per linee di livello delle curve del tipo ellissi.

Da questo punto di vista i problemi di calcolo delle variazioni si riducono allo studio delle proprietà delle soluzioni di equazioni differenziali. Ma la problematica può essere invertita. La risoluzione di un problema al contorno per un'equazione differenziale può essere ricondotta a un problema di calcolo delle variazioni. Un tentativo fatto prima da Gauss nello studio dell'equilibrio di un campo elettrostatico e poi da Riemann in altre questioni di matematica pura fu messo in crisi da Weierstrass nel 1870. Sia Gauss sia Riemann avevano ammesso come evidente che esistesse una funzione dotata di derivate e minimizzante l'integrale (10). Il lento superamento di queste critiche di Weierstrass fa parte della storia della matematica di questo secolo.

La prima questione fondamentale che si presenta è quella di sapere se esiste una soluzione di un problema di calcolo delle variazioni o, per formulare il problema in termini piú moderni, ci si deve chiedere se esiste qualcosa cui può essere attribuito il carattere di soluzione.

Questo nuovo approccio alla teoria ha dato luogo ai cosiddetti metodi diretti del calcolo delle variazioni. Essi si sono sviluppati in stretta relazione con la teoria delle funzioni di variabili reali e con l'analisi funzionale.

L'idea dei metodi diretti è quella di mostrare dapprima che l'integrale è limitato inferiormente, poi che esso è semicontinuo inferiormente rispetto a qualche tipo di convergenza e infine che esiste una successione minimizzante di funzioni ammissibili che converge, nel senso richiesto, a qualche funzione ammissibile la quale non è detto a priori che ammetta derivate. Chiaramente tale funzione limite è una «soluzione» del problema considerato.

È importante sottolineare che la convergenza della successione minimizzante non è data a priori ma la sua scelta dipende dal problema particolare. La scelta di una topologia conveniente e, di conseguenza, l'insieme appropriato di fun-

zioni ammissibili è il punto principale in molti problemi di analisi. Anzi, è questo punto di vista che, a giudizio di chi scrive, differenzia l'analisi da altri campi della matematica.

Da queste considerazioni si è giunti ad individuare quale è il piú opportuno insieme di funzioni da considerare come ammissibili. Lo studio di questi insiemi ha condotto a considerare quelli che vengono chiamati spazi di Sobolev. Senza soffermarsi qui sulla descrizione delle funzioni di questi spazi, è possibile affermare che esse appaiono come le funzioni, le piú generali, che dànno significato alla quantità (10).

In molti casi è possibile allora dimostrare l'esistenza della soluzione, a condizione di dare a questa un significato molto generale.

Si è visto prima che una funzione minimizzante di un integrale è soluzione dell'equazione di Eulero se si sa che questa possiede un certo numero di derivate. Questo non è il caso quando, per assicurare l'esistenza, si è costretti a ricercare la funzione minimizzante in spazi di Sobolev.

In questi casi appare di primaria importanza sostituire l'equazione di Eulero con la forma che traduce l'annullarsi della variazione prima. I problemi al contorno per equazioni differenziali, anche se non sono del tipo delle equazioni di Eulero di un integrale, vengono cosí formulati in una forma debole che è suggerita proprio dall'annullarsi della variazione.

Ad esempio, il problema di determinare la soluzione dell'equazione $\Delta u = f$ che assuma i valori al contorno $u = g$ è formulato nel senso seguente: trovare u tale che $u = g$ su $\partial\Omega$ e che soddisfi

$$\int_\Omega (u_x\varphi_x + u_y\varphi_y)\, dx\, dy = \int_\Omega f\varphi\, dx \qquad \text{per ogni } \varphi \text{ nulla su } \partial\Omega.$$

Si presenta allora un nuovo problema: una soluzione debole di un problema al contorno ammette derivate di ordine superiore se i dati del problema fanno altrettanto? Questo è il problema della regolarizzazione delle soluzioni deboli. Problemi dello stesso tipo si presentano nella teoria delle disequazioni variazionali, teoria strettamente connessa al calcolo delle variazioni.

In quest'ambito sorgono anche interessanti questioni sulla natura dell'insieme di contatto (cioè dell'insieme dei punti, ove, per rimanere all'esempio già illustrato alla fine del § 4, ostacolo e membrana si toccano).

In questa teoria possono infine formularsi alcuni problemi di frontiera libera. Si tratta di problemi dove il dominio nel quale si deve considerare il problema non è noto a priori, ma deve essere determinato in modo da permettere alla soluzione di soddisfare dati sovrabbondanti sul contorno.

Problemi di frontiera libera si presentano in numerosi problemi di matematica applicata. Mi limiterò a ricordare quello dello studio di un fluido in mezzi porosi, o quello della lubrificazione di un cuscinetto e infine quello della distribuzione della velocità intorno a un profilo alare.

Il tentativo qui fatto di esporre i principali campi dell'analisi che sono connessi all'idea di variazione mostra un aspetto della ricerca matematica moderna che è tuttora in pieno sviluppo. [G.S.].

Il fisico sperimentale (cfr. **fisica**) indaga sulla **natura** alla ricerca dei fenomeni e delle leggi che li descrivono (cfr. **empiria/esperienza, esperimento**). Il matematico (cfr. **matematiche**) cerca le ragioni della scelta di una **legge** (cfr. **convenzione, metodo, operatività, paradigma, scienza**). In molti casi i fenomeni fisici sono descritti (cfr. **spiegazione, teoria/modello**) da **applicazioni** o da **funzioni** che rappresentano le configurazioni di un **oggetto** o l'evolvere di un **fenomeno** al variare del tempo (cfr. **ciclo, tempo/temporalità**). L'indagine sulla natura particolare di una data legge spinge all'idea di variazione. Quest'idea presente fin dall'inizio del calcolo **infinitesimale** (cfr. anche **differenziale**) si sviluppa parallelamente al **calcolo** stesso. Molte considerazioni complementari (cfr. **continuo/discreto, dipendenza/indipendenza, locale/globale, stabilità/instabilità**) confluiscono nel calcolo delle variazioni: la **simmetria** all'origine delle prime considerazioni geometriche (cfr. **geometria e topologia**) è affiancata dalle idee piú sofisticate della matematica moderna (cfr. **strutture matematiche**). Si viene cosí a costituire una vera e propria disciplina (cfr. **disciplina/discipline**) con problematiche peculiari.